TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

E. TIIT

TÕENÄOSUSTEOORIA

I

TARTU 1970

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Arvutusmatemaatika kateeder

E. Tiit

TÕENÄOSUSTEOORIA

I

Loengukonspekt

Teine trükk

Tartu 1970

E e s s õ n a .

Käesolev loengukonspekt on mõeldud kasutamiseks eeskätt TRÜ matemaatikaosakonna üliõpilastele. Tõenäosusteooria-alase eestikeelse kirjanduse nappuse tõttu on aga konspekti koostamisel mõnevõrra silmas peetud ka hoopiski laiemat lugejaskonda. Selleks on konspekti I peatükk "Elementaarne sissejuhatus tõenäosusteooriasse" esitatud sisulise tervikuna, mis sisaldab nn. klassikalise tõenäosusteooria olulisemaid tulemusi (enamasti koos tõestustega), varustatuna rohkete näidete, jooniste ning harjutusülesannetega. Selle osa materjal on peaaegu tervikuna omandatav üksnes keskkoolimatemaatika baasil (silmas peetakse uusi programme); kuid ka soliidsema matemaatilise ettevalmistusega lugejale on I peatüki läbimõtlemine kaheldamatult kasulik nimelt tõenäosusteoreetilise intuitsiooni kasvamise seisukohalt. Peatükist kui tervikust langeb metoodiliselt mõnevõrra välja § 7 "Klassikalised tõenäosusjaotused", mis on aga siia paigutatud viimase rakendusliku tähtsuse tõttu.

Matemaatikaosakonna üliõpilaste jaoks ettenähtud süstemaatiline esitus algab II peatükiga "Mõningaid mõisteid mõõduteooriast", kus antakse tõenäosusteooria aksiomaatiliseks esituseks vajalik ettevalmistus mõõdu- ja integraaliteooriast. Vaadeldava sisu omandamisel on tarvis mõningaid eelteadmisi hulgateooriast ning reaalmuutuja funktsiooniteooriast.

Tõenäosusteooria aksiomaatiline käsitlus algab alles käesoleva konspekti viimases peatükis "Tõenäosusteooria põhimõisteid", kus, tuginedes mõõduteooria aparatuurile, defineeritakse juba abstraktselt sündmus, tõenäosus, juhuslik suurus, jaotus jne. Tuleb märkida, et kuna III peatükis vaadeldakse osaliselt samu mõisteid mis I peatükiski, kuigi erinevast seisukohast lähtudes, ei ole õnnestunud täiesti vältida kordumisi (näiteks keskväärtuse ja dispersiooni omadused).

Et tõenäosusteooria aksiomaatiline esitus on küllaltki abstraktne, tuleb soovitada ka matemaatikaosakonna üliõpilastele paralleelselt aine süstemaatilise omandamisega (alates III peatükist) tutvuda samade mõistete elementaarse sisuga (I peatükk), mis aitab ühtlasi mõista ka tõenäosusteooria rakenduslikke võimalusi.

Eriti kehtib viimane väide harjutusülesannete kohta. Iga paragrahvi lõppu on lisatud niihästi teoreetilisema kui ka praktilisema kallakuga ülesandeid (I peatüki ulatuses on need paigutatudki vastavalt kahte ossa), mille lahendamine aitab kaasa aine sügavamale omandamisele. Et ülesannete osas kordamist ei esine, tuleks ka nendel üliõpilastel, kes õppimist alustavad II peatükist, lahendada (sobiva materjali juures) harjutusülesandeid I peatükist.

Et konspekt on mõeldud süstemaatiliseks aine omandamiseks, on viiteid (eriti tagant ette) tehtud suhteliselt vähe, kuigi III ja II ning samuti ka III ja I peatüki vahel on väga tihe seos. Viidete korral kasutatakse järgnevat süsteemi: sama paragrahvi ulatuses viidatakse ühe numbriga (näide 3, valem (5), teoreem 2); teisele paragrahvile viidatakse kahe numbriga (näide 2.3, valem (1.4), teoreem 5.1, punkt 2.5 või lihtsalt vt. 2.5 - s. t. vastavalt näide 3 paragrahvist 2, valem 4 paragrahvist 1, teoreem 1 paragrahvist 5, punkt 5 paragrahvist 2. Teisele peatükile viidates lisame veel peatüki numbri (rooma numbrina) - vt. III 1.2, s. t. ptk. III § 1 punkt 2.

Avaldan tänu retsensentidele I. Kullile, T. Mölsile, K. Soonetsile, R. Tammestele ja H. Õiglasele väärtuslike nõuannete eest. Samuti tänan H. Tera ja M. Vanemat suure abi eest konspekti vormistamisel.

I. ELEMENTAARNE SISSEJUHATUS TÕENÄOSUSTEOORIASSE.

§ 1. S ü n d m u s.

1. Sündmuse mõiste.

Esimeseks oluliseks mõisteks, millega me tõenäosusteoorias kokku puutume, on sündmus. Et sündmus kuulub tõenäosusteooria põhimõistete hulka, ei ole seda võimalik defineerida veelgi lihtsamate mõistete abil.

Sündmusi tähistatakse tavaliselt suurte tähtedega. A, B, C (lisades vajaduse korral indeksid: A_1, A_2, ...).

Näide 1. Sündmusteks on:

C: potikaardi väljatõmbamine kaardipakist;

D: piltkaardi väljatõmbamine kaardipakist;

L: viie silma saavutamine täringuviskel;

N: paarisarvulise silmade arvu saamine täringuviskel;

U: vee keemahakkamine normaalõhurõhul temperatuuril 100° C ja soojuse juurdeandmisel;

V: vee keemahakkamine normaalõhurõhul temperatuuril 20° C.

Olgu märgitud, et mingi sündmuse A fikseerimisel peab olema kindlaks määratud ka teatud tingimuste kompleks S, mille täidetust me eeldame (vrd. sündmusi U ja V).

Tõenäosusteooria seisukohast pakub sündmuste puhul huvi eeskätt see, kas sündmus toimub (esineb) antud tingimuste kompleksi korral või ei toimu (ei esine), kusjuures sündmuse konkreetne iseloom on kõrvalise tähtsusega. Määratud tingimuste kompleksi täitmist nimetatakse tõenäosusteoorias ka katseks.

Vaadeldes näites 1 esitatud sündmusi, paneme tähele, et need erinevad üksteisest oma toimumise võimalikkuse poolest.

Sündmus V ei saa üldse toimuda - seega ta on võimatu. Sündmust, mis vaadeldava tingimuste kompleksi korral ei saa kunagi toimuda, nimetatakse võimatuks sündmuseks ja tähistatakse sümboliga $\emptyset$.

Sündmus U seevastu toimub päris kindlasti. Sündmust, mis vaadeldava tingimuste kompleksi korral alati toimub, nimetatakse kindlaks sündmuseks ja tähistatakse sümboliga Ω .

Sündmused C , D , L ja N võivad toimuda või ka mitte toimuda. Sündmust, mis vaadeldava tingimuste kompleksi korral võib toimuda või ka mitte toimuda, nimetatakse juhuslikuks sündmuseks.

2. Sündmustevahelised seosed.

Eeldame edaspidi, et meil on fikseeritud mingi tingimuste kompleks S ja me vaatleme sündmusi A , B , C ,..., mis on defineeritud selle tingimuste kompleksi jaoks ja on kas juhuslikud, kindlad või võimatud.

Mõnikord esineb kahe sündmuse A ja B vahel selline vahekord, et alati, kui toimub sündmus A, toimub ka sündmus B. Sel juhul ütleme, et <u>sündmus B järeldub sündmusest A</u> ehk <u>sündmus B sisaldab sündmust A</u>, ja märgime selle seose lühidalt

$$A \subset B \quad \text{või} \quad B \supset A .$$

<u>Märkus</u>: Käesolevas ja ka järgnevas punktis kasutusele võetud mõisteid illustreerib hästi joonis 1 (§ 4), kus sündmustena vaadeldakse teatavate tasandiosade tabamist juhuslikul viskel.

<u>Näide 2</u>. Olgu sündmus E kuue silma saavutamine täringuviskel. Siis on sündmuse E ja sündmuse N (vt. näide 1) vahel seos

$$E \subset N .$$

(Põhjendada!)

Iga sündmus A sisaldub kindlas sündmuses Ω:

$$A \subset \Omega ,$$

sest sündmus Ω toimub kindlasti, järelikult ka alati, kui toimub sündmus A. Samuti on iga sündmuse A korral õige seos

$$\emptyset \subset A .$$

Tõepoolest, võimatu sündmus ei toimu kunagi, seetõttu võime eksimata öelda, et juhul, kui see toimuks, toimuks ka ükskõik milline teine sündmus.

Sündmustevahelise sisalduvusseose abil saame defineerida ka kahe sündmuse võrdsuse: <u>sündmused A ja B on võrdsed</u> (ehk samaväärsed) parajasti siis, kui

$$A \subset B \text{ ja } B \supset A .$$

Sündmuste võrdsuse märgime:

$$A = B .$$

3. Tehted sündmustega.

Kahe sündmuse abil saame defineerida ka mõningaid uusi sündmusi.

a) Sündmuste summa. Sündmuste A ja B summaks (ka ühendiks) $A \cup B$ nimetatakse sündmust, mille toimumine seisneb kas sündmuse A või sündmuse B (või mõlema sündmuse A ja B) toimumises.

Näide 3. Sündmuste C ja D summaks (vt. näide 1) on sündmus $C \cup D$ - kas potimasti kuuluva kaardi või piltkaardi väljatõmbamine kaardipakist.

Sündmuseks $L \cup N$ on tulemuse 2, 4, 5 või 6 saavutamine täringuviskel.

Sündmus $N \cup E$ (vt. näide 2) on aga sama mis sündmus N, s. t. õige on võrdus:

$$N \cup E = N .$$

(Põhjendada!)

Osutub, et mistahes sündmuse A ja kindla sündmuse summa, samuti ka A ja võimatu sündmuse summa korral kehtivad võrdused:

$$\Omega \cup A = \Omega ,$$

$$A \cup \emptyset = A .$$

(Põhjendada!)

b) Sündmuste korrutis. Sündmuste A ja B korrutiseks (ka ühisosaks) $A \cap B$ ehk AB nimetatakse sündmust, mille toimumine seisneb mõlema sündmuse A ja B toimumises.

Näide 4. Sündmuste C ja D korrutiseks CD on potimastist piltkaardi väljatõmbamine kaardipakist.

Sündmuste L ja N korrutiseks LN on aga võimatu sündmus $\emptyset$, sest need sündmused ei saa mõlemad üldse esineda.

Sündmuste N ja E korrutiseks on sündmus E, s. t.

$$N \cap E = E .$$

(Põhjendada!)

Mistahes sündmuse A ja kindla (vastavalt võimatu) sündmuse korrutise jaoks kehtivad võrdused:

$$\Omega \cap A = A ,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset .$$

(Põhjendada!)

Sündmuste summa ja korrutise definitsioonist järeldub, et mõlemad operatsioonid on kommutatiivsed:

$$AB = BA ,$$

$$A \cup B = B \cup A .$$

(Põhjendada!)

Olgu n suvaline lõplik naturaalarv ning olgu meil määratud sündmused $A_1, A_2, \ldots, A_n$; n sündmuse summa $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ saame defineerida, rakendades $n-1$ korda järjest kahe sündmuse summa definitsiooni: $((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup A_4 \ldots$. (Anda sündmusele $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ vahetu definitsioon!)

Samuti on defineeritav ka n sündmuse $A_1 \ldots A_n$ kor-

rutis $A_1A_2...A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. (Anda sündmusele $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ vahetu definitsioon!).

<u>Näide 5</u>. Sündmus $L \cup N \cup E$ on tulemuse 2, 4, 5 või 6 esinemine täringuviskel. Olgu sündmus G 1 või 3 silma esinemine täringuviskel. Siis on

$$L \cup N \cup G = \Omega .$$

Kolme sündmuse summa definitsioonist järeldub, et sündmuste liitmise operatsioon on assotsiatiivne:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C .$$

Tõepoolest, sündmus $A \cup B$ seisneb kas A või B (või mõlema) esinemises, sündmus $(A \cup B) \cup C$ - kas $A \cup B$ või C (või mõlema) esinemises, s. t. kas A, B, C (või AC, BC, AB või ABC) esinemises. Järelikult võime sulgudest loobuda ning märkida summa äärmise parempoolse kirjutusviisi järgi.

Samuti on ka kolme sündmuse korrutis <u>assotsiatiivne</u>:

$$(AB)C = A(BC) = ABC .$$

(Põhjendada!)

Sündmuste korrutamise ja liitmise tehteid seob distributiivsuse seadus:

$$(A \cup B)C = AC \cup BC .$$

(Põhjendada!)

c) <u>Sündmuste vahe</u>. Sündmuste A ja B vaheks $A \setminus B$ nimetatakse sündmust, mille toimumine seisneb sündmuse A toimumises ja sündmuse B mittetoimumises.

<u>Näide 6.</u> Sündmuste C ja D vaheks $C \setminus D$ on potimastist mittepiltkaardi väljatõmbamine kaardipakist.

Sündmuseks $D \setminus C$ on mittepotimastist piltkaardi tõmbamine.

Sündmus $N \setminus E$ on 4 või 2 silma saamine täringuviskel.

Sündmus $E \setminus N = \emptyset$. (Missuguse järelduse saame teha kahest viimasest võrdusest?)

Lõpuks on sündmuseks $N \setminus L$ sama sündmus N, s. t. $N \setminus L = N$. (Põhjendada viimased kaks seost!)

Mistahes sündmuse A korral on õiged järgmised võrdused:

$$A \setminus \Omega = \emptyset ,$$

$$A \setminus \emptyset = A ,$$

$$\emptyset \setminus A = \emptyset .$$

(Põhjendada!)

d) Vastandsündmus. Kindla sündmuse Ω ja suvalise sündmuse A vahet $\Omega \setminus A$ nimetatakse sündmuse A vastandsündmuseks ning tähistatakse sümboliga $\bar{A}$.

Siit järeldub, et sündmuse A vastandsündmus $\bar{A}$ toimub parajasti siis, kui sündmus A ei toimu.

Näide 7. Olgu sündmuseks F mündiviskel vapipoole pealelangemine. Sündmus $\bar{F}$ on siis mündiviskel kirjapoole pealelangemine (eeldame, et münt ei saa serviti seisma jääda!).

Näide 8. Sündmuse L vastandsündmuseks $\bar{L}$ on sündmus, milleks on kas 1, 2, 3, 4 või 6 silma saavutamine täringuviskel (s. t. sündmuse L vastandsündmuseks on sisuliselt mitme sündmuse summa).

Sündmuseks $\bar{N}$ on paarituarvulise tulemuse saamine täringuviskel.

Sündmuseks $\bar{D}$ on mittepiltkaardi väljatõmbamine kaardipakist.

Sündmust ja tema vastandsündmust seovad järgnevad omadused:

$$\bar{\bar{A}} = A ,$$
$$A \cup \bar{A} = \Omega ,$$
$$A \cap \bar{A} = \emptyset .$$

(Tõestada!)

Vastandsündmuse saame määrata ka kindlale sündmusele ja võimatule sündmusele:

$$\bar{\Omega} = \emptyset ,$$
$$\bar{\emptyset} = \Omega .$$

(Põhjendada!)

Tehteid sündmuste vahel ja vastavalt vastandsündmuste vahel seovad nn. <u>duaalsusseosed</u>:

$$A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \quad \text{ehk} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} ,$$
$$A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \quad \text{ehk} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} .$$

Tõestame esimese duaalsusseose (teise kuju).

Sündmus $\overline{A \cup B}$ tähendab sündmuse $A \cup B$ mittetoimumist, s. t. ei toimu ei sündmus A ega ka sündmus B .

Sündmus $\bar{A} \cap \bar{B}$ tähendab sündmuste $\bar{A}$ ja $\bar{B}$ üheaegset toimumist, s. t. A ei toimu ja B ei toimu. Võrdus on tõestatud. (Tõestada duaalsusseoste kahe kuju samaväärsus ja teine duaalsusseos!)

4. Üksteist välistavad sündmused.

Sündmusi A ja B nimetatakse <u>teineteist välistavateks</u>, kui kehtib seos

$$A \cap B = \emptyset .$$

<u>Näide 9</u>. Sündmused L ja E on teineteist välistavad.
Sündmused N ja G on teineteist välistavad.
Sündmused D ja $\bar{D}$ on teineteist välistavad.

Nagu näeme, ei saa teineteist välistavad sündmused kunagi koos toimuda.

Vaatleme mingite (fikseeritud tingimuste kompleksi S korral defineeritud) sündmuste $A, B, \ldots$ hulka, kusjuures eeldame, et kõik vaadeldavad sündmused on erinevad, s. t. ei leidu kaht sellesse hulka kuuluvat sündmust A ja B nii, et kehtiks võrdus $A = B$. Niisugust sündmuste hulka nimetame sündmuste süsteemiks ja tähistame sümboliga $\mathcal{A}$.

Sündmuste süsteemi $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, millesse kuuluvad sündmused on kõik teineteist välistavad, s. t.

$$A_i \cap A_j = \emptyset , \quad \text{kui} \quad i \neq j$$

nimetatakse <u>üksteist välistavate sündmuste süsteemiks</u>.

Olgu $\mathcal{A}$ üksteist välistavate sündmuste süsteem. Kui kehtib seos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega ,$$

siis me ütleme, et süsteem $\mathcal{A}$ on <u>täielik sündmuste süsteem</u>.

Iga sündmus A moodustab koos oma vastandsündmusega täieliku sündmuste süsteemi $\{A , \bar{A}\}$.

<u>Näide 10</u>. Sündmused L, G ja N moodustavad täieliku sündmuste süsteemi.

5. Ülesandeid.

1. Tõestada seosed: $AB \subset A$,

$$A \subset A \cup B ,$$

$$A \cap A = A ,$$

$$A \cup A = A .$$

2. Tõestada:

kui $A \cap B = A$, siis $A \subset B$,

kui $A \cup B = A$, siis $A \supset B$.

Kas ka pöördteoreemid kehtivad?

3. Tõestada seosed

$$A \setminus B = A \setminus AB ,$$

$$(A \cup B)(A \cup C) = A \cup BC .$$

4. Tõestada:

kui $A \setminus B = A$, siis $AB = \emptyset$,

kui $A \setminus B = \emptyset$, siis $B \supset A$,

kui $(A \setminus B) \cup B = A$, siis $B \subset A$.

------ + ------

1. Lasteaia rühmas on n last. Tähistame sündmuse, et nimestikus i-s laps on poiss, sümboliga $A_i (i=1,2,\ldots,n)$. Avaldada sündmuste $A_i (i=1,2,\ldots,n)$ kaudu järgnevad sündmused:

1) rühmas on vähemalt 1 poiss;

2) rühmas on kõik poisid;

3) rühmas on vähemalt 3 tütarlast;

4) rühmas on üks tütarlaps, ülejäänud poisid.

2. Aknast möödub auto. Defineerime järgmised sündmused:

A: see on sõiduauto,

B: see auto sõidab vasakule,

C: sellel autol on naisjuht.

Avaldada sündmuste A , B , C , D kaudu järgmised sündmused:

1) kõigil taksodel on meesjuhid,

2) sõiduautod sõidavad siin ainult paremale,

3) veoautodel ei ole naisjuhte,

4) vasakule võivad sõita ainult taksod,

5) kõik taksod on sõiduautod.

3. Aknast möödub 10 autot. Tähistame sündmuse , et i-s auto on takso, sümboliga $A_i (i=1,2,...,10)$. Avaldada sündmuste $A_i (i=1,2,...,10)$ kaudu järgnevad sündmused:

1) kolmas auto on takso, viies aga mitte,

2) ükski mööduv auto pole takso,

3) möödub vähemalt kaks taksot,

4) mööduvatest autodest kolm ei ole taksod,

5) autode hulgas on niihästi taksosid kui ka mitte-taksosid.

4. Klassis on n õpilast. Nende hulgast valiti juhuslikult üks õpilane. Defineerime järgmised sündmused:

A - valitud õpilane oli tütarlaps,

B - valitud õpilane oli kommunistlik noor,

C - valitud õpilane õppis hästi,

D_i - valitud õpilane kuulus i-ndat aastat spordikollektiivi $(i=0,1,...,11)$:

Avaldada sündmuste A, B, C ja D_i $(i=0,1,\ldots,11)$ abil järgnevad sündmused:

1) kõik hästi õppivad poisid on kommunistlikud noored,
2) kõik tütarlapsed-kommunistlikud noored õpivad hästi,
3) kõik poisid on vähemalt kolmandat aastat spordikollektiivi liikmed.

5. Perekonnas on n last. Nende hulgast valiti juhuslikult üks. Tähistame sümboliga A_i sündmuse, et valituks osutus vanuse poolest i-s laps $(i=1,2,\ldots,n)$ vanemast alates. Defineerime veel sündmused:

B - valitud laps on poiss,

C - valitud laps on heledapäine,

D - valitud laps on vasakukäeline.

Avaldada sündmuste A_i $(i=1,2,\ldots,n)$, B, C ja D kaudu järgmised sündmused:

1) kolm noorimat last on tütarlapsed,
2) kõik tütarlapsed on tumedajuukselised,
3) ükski laps pole vasakukäeline.

§ 2. Tõenäosus.

1. Elementaarsündmuste süsteem.

Olgu meil tegemist katsega, millel on n erinevat võimalikku tulemust, s. t. antud tingimuste kompleksi S realiseerumisel võib toimuda n erinevat juhuslikku sündmust, kusjuures üks (ja ainult üks) neist kindlasti toimub. Näeme, et katsetulemused moodustavad meie eeldustel täielikku sündmuste süsteemi.

Esitame veel ühe täiendava nõude: olgu vaadeldavasse süsteemi kuuluvad sündmused <u>võrdvõimalikud</u> (ehk võrdtõenäosed). Samuti kui sündmuse mõiste, on ka võrdtõenäosuse mõiste defineerimatu põhimõiste, mille sisuks on katsetulemuste teatav sümmeetria (tingimuste kompleksi S korral ei ole ühe katsetulemuse esinemine eelistatavam mõne teise esinemisest).

Võrdvõimalike sündmuste täielikku süsteemi nimetame <u>elementaarsündmuste süsteemiks</u>. Elementaarsündmuste süsteemi kuuluvaid sündmusi nimetatakse <u>elementaarsündmusteks</u>. Juhul, kui süsteemi moodustavate elementaarsündmuste arv on lõplik, nimetame seda <u>lõplikuks elementaarsündmuste süsteemiks</u>. Käesolevas (ja ka järgnevas) paragrahvis vaatlemegi lõplikke elementaarsündmuste süsteeme.

<u>Näide 1</u>. Süsteem $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$, kus A_i $(i=1,2,\ldots,6)$ on täringuviskel i-silmalise tulemuse saavutamine, on elementaarsündmuste süsteem.

Järjestame kaardipakki kuuluvad 52 erinevat kaarti mingil viisil ning tähistame sündmuse - kaardipakist tõmmati i-s kaart - sümboliga B_i. Siis süsteem $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_{52}\}$ moodustab elementaarsündmuste süsteemi.

Kuna kõikvõimalikud elementaarsündmuste summad moodustavad omakorda sündmused, siis me saame n elementaarsündmuse abil defineerida 2^n erinevat sündmust (sealhulgas ka

Ω ja $\emptyset$. - Põhjendada!).

Näide 2. Näidetes 1.1, 1.2 ja 1.5 defineeritud sündmused avalduksid näites 1 esitatud elementaarsündmuste kaudu järgnevalt:

$$L = A_5,$$
$$N = A_2 \cup A_4 \cup A_6,$$
$$E = A_6,$$
$$G = A_1 \cup A_3,$$
$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6.$$

2. Klassikaline tõenäosuse mõiste.

Juhuslike sündmuste vaatlemisel on neid sageli tarvis iseloomustada nende toimumise võimalikkuse seisukohalt. Selliseks iseloomustajaks on juhusliku sündmuse tõenäosus. Sündmuse A tõenäosust tähistatakse tavaliselt sümboliga[1] $P(A)$.

Vaatleme sündmusi, mis avalduvad teatud elementaarsündmuste süsteemi $\mathcal{A}$ kuuluvate elementaarsündmuste kaudu. Mida suurema hulga elementaarsündmuste summana vaadeldav sündmus avaldub, seda rohkem võimalusi on selle sündmuse toimumiseks. See tähelepanek ongi aluseks klassikalisele tõenäosuse definitsioonile.

Olgu antud lõplik elementaarsündmuste süsteem $\mathcal{A}$. Avaldugu sündmus A süsteemi $\mathcal{A}$ kuuluvate elementaarsündmuste summana. Sündmuse A tõenäosuseks nimetame selles sündmuses sisalduvate erinevate elementaarsündmuste arvu m_A ja elementaarsündmuste koguarvu n suhet, s. t.

[1] Täht P on esitäheks sõnas "probability" ja "probabilité", mis tähendab "tõenäosus" vastavalt inglise ja prantsuse keeles.

$$P(A) = \frac{m_A}{n} .$$

Sageli kasutatakse klassikalise tõenäosuse definitsiooni ka järgmisel kujul: sündmuse A tõenäosuseks nimetatakse selle sündmuse jaoks soodsate juhuste arvu suhet kõigi juhuste arvusse.

Selle definitsiooni rakendamisel tuleb silmas pidada, et "juhused", mille kaudu on tõenäosus määratud, peavad moodustama täieliku üksteist välistavate võrdtõenäoste sündmuste lõpliku süsteemi, s. t. juhused peavad olema elementaarsündmusteks selles mõttes, nagu me need defineerisime eelmises punktis. Iga sündmuse jaoks soodsad juhused on nimelt need elementaarsündmused, mida vaadeldav sündmus sisaldab.

Seega langevad pärast "juhuse" mõiste täpsustamist mõlemad definitsioonid ühte, kuid viimasena esitatu avab võib-olla intuitiivselt paremini taibatavalt klassikalise tõenäosuse mõiste.

Näide 3. Leiame näidetes 1.1, 1.2 ja 1.5 defineeritud sündmuste tõenäosused:

$$P(L) = \frac{1}{6} ; \quad P(N) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} ; \quad P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} ;$$

$$P(D) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} ; \quad P(E) = \frac{1}{6} ; \quad P(G) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} .$$

Näeme, et kõigi juhuslike sündmuste tõenäosused on lihtmurrud, s. t.

$$0 \leq P(A) \leq 1 .$$

Kuna võimatu sündmus ei sisalda ühtki elementaarsündmust (miks?), siis on tema tõenäosus 0 :

$$P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0 .$$

Kindel sündmus seevastu võrdub aga kõigi elementaarsündmuste summaga (miks?), s. t. sisaldab n erinevat elementaarsündmust. Seetõttu on tema tõenäosus :

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1 .$$

3. Tõenäosuste liitmise lause.

Olgu sündmuste A ja B tõenäosused teada. Tekib küsimus, kas on võimalik nende tõenäosuste kaudu avaldada ka sündmuste A ja B summa, vahe jne., s. o. sündmuste A ja B abil moodustatud sündmuste tõenäosusi.

Osutub, et mõnel juhul on see võimalik. Nii kehtib näiteks järgmine oluline teoreem, mida nimetatakse tõenäosuste liitmise lauseks.

Teoreem 1. Olgu sündmused A ja B teineteist välistavad. Siis kehtib seos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) , \qquad (1)$$

s. t. sündmuste summa tõenäosus võrdub liidetavate tõenäosuste summaga.

Tõestus. Olgu sündmuse A tõenäosus $P(A) = \frac{m_A}{n}$, s. t. sündmus A on m_A elementaarsündmuse summa.

Olgu sündmuse B tõenäosus $P(B) = \frac{m_B}{n}$, s. t. sündmus B on m_B elementaarsündmuse summa. Meie eelduse kohaselt ei sisaldu ükski sündmuses B sisalduv elementaarsündmus sündmuses A .

Sündmus $A \cup B$ sisaldab niihästi sündmuses A sisalduvaid kui ka sündmuses B sisalduvaid elementaarsündmusi. Et need on kõik erinevad, siis on $A \cup B$ $m_A + m_B$ elementaarsündmuse summa, s. t.

$$P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} .$$

Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. Sündmuse A vastandsündmuse $\bar{A}$ tõenäosus avaldub sündmuse A tõenäosuse kaudu järgnevalt:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) . \qquad (2)$$

Tõestus. Sündmused A ja $\bar{A}$ on üksteist välistavad, seega võime nende korral rakendada teoreemi 1. Kuid

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1 ,$$

kust järeldubki seos (2).

Järeldus 2. Kui sündmus A sisaldub sündmuses B :

$$A \subset B ,$$

siis on õige võrratus:

$$P(A) \leq P(B) . \qquad (3)$$

Tõestus. Sündmuse B võime esitada kujul:

$$B = A \cup (B \setminus A) .$$

Tõepoolest, kui toimub sündmus A , siis toimub ka sündmus B (eelduse tõttu); peale selle on veel võimalus, et B toimub, kuid A ei toimu. Siit järeldub ka, et sündmused A ja $B \setminus A$ on teineteist välistavad. Järelikult kehtib seos:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) , \qquad (4)$$

millest aga järeldubki võrratus

$$P(B) \geqslant P(A) ,$$

sest alati $P(B \setminus A) \geqslant 0$.

Järeldus 3. Moodustagu sündmused $B_1, B_2, \ldots, B_k$ üksteist välistavate sündmuste süsteemi. Siis kehtib võrdus:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) . \qquad (5)$$

(Tõestada!)

Näide 4.

$P(L) = \frac{1}{6}$; $P(G) = \frac{1}{3}$; $P(L \cup G) = P(A_1 \cup A_3 \cup A_5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$.

$P(\bar{L}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$; $P(\bar{L}) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_6) = \frac{5}{6}$.

$E \subset N$; $P(E) = \frac{1}{6}$; $P(N) = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$; $P(N \setminus E) = P(A_2 \cup A_4) =$

$= \frac{2}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$.

Näite 4 esimene osa illustreerib teoreemi 1, teine osa järeldust 1 ja kolmas osa järeldust 2.

4. Üldine tõenäosuste liitmise lause.

Vaatleme nüüd, kuidas saaks määrata kahe suvalise sündmuse summa tõenäosust, loobudes kitsendusest, et nad peavad olema teineteist välistavad.

Teoreem 2. Suvaliste sündmuste A ja B korral kehtib seos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) . \tag{6}$$

Tõestus. Olgu sündmuse A tõenäosus $P(A) = \frac{m_A}{n}$, s. t. sündmus A on m_A elementaarsündmuse summa.

Olgu sündmuse B tõenäosus $P(B) = \frac{m_B}{n}$, s. t. B on m_B elementaarsündmuse summa. Olgu m_{AB} elementaarsündmust sellised, mis sisalduvad niihästi sündmuses A kui ka sündmuses B. Siis sündmuses $A \cup B$ sisaldub $m_A + m_B - m_{AB}$ erinevat elementaarsündmust. Järelikult

$$P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B - m_{AB}}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{m_{AB}}{n} = P(A) + P(B) - P(AB) .$$

Teoreem on tõestatud.

Mõnevõrra keerukam on leida valemit enam kui kahe suvalise sündmuse summa tõenäosuse jaoks.

Järeldus 4. Suvaliste sündmuste A, B ja C korral kehtib seos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

(Tõestada!)

Näide 5. Sündmus $C \cup D$ (vt. näide 1.4) on kas potimastist kaardi või piltkaardi saamine juhusliku kaardi valimisel kaardipakist. Leiame selle sündmuse tõenäosuse teoreemi 2 abil:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(CD) .$$

Siin sündmus CD on potimastist piltkaardi tõmbamine (vt. näide 1.4); $P(CD) = \frac{3}{52}$, sest sündmus CD koosneb kolme erineva elementaarsündmuse summast. Siis

$$P(C \cup D) = \frac{1}{4} + \frac{3}{13} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26} .$$

Defineerime sündmuse H – ärtumastist kaardi väljatõmbamine. Ilmselt $P(H) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Leiame

$$P(C \cup D \cup H) = P(C) + P(D) + P(H) - P(CD) - P(CH) - P(DH) + P(CDH) .$$

Selleks on meil tarvis leida veel sündmuste CH, DH ja CDH tõenäosused. On aga lihtne näha, et $CH = \emptyset$, siis ka $CDH = \emptyset$, ja $P(CH) = P(CDH) = 0$; sündmus DH on aga ärtumastist piltkaardi tõmbamine, seega $P(DH) = \frac{3}{52}$. Saame nüüd:

$$P(C \cup D \cup H) = \frac{1}{4} + \frac{3}{13} + \frac{1}{4} - \frac{3}{52} - \frac{3}{52} = \frac{32}{52} = \frac{8}{13} .$$

5. Ülesandeid.

1. Tuletada tõenäosuste liitmise lause nelja sündmuse jaoks.

2. Üldistada tõenäosuste liitmise lause n sündmuse jaoks.

3. Paigutada suuruste vahele õige (võrratuse- või võrduse-) märk ning põhjendada saadud seoseid:

$$P(A\cup B) \quad P(A) + P(B),$$
$$P(A) \quad P(B) + P(A\setminus B),$$
$$P(A) \quad P(B) + P(A\bar{B}),$$
$$P(AB) \quad P(A) - P(\bar{B}).$$

——— + ———

1. Kas süsteem, mis koosneb sündmustest:

A_1 - vapi pealelangemine esimesel mündiviskel,

A_2 - vapi pealelangemine teisel mündiviskel,

. . . .

A_k - vapi pealelangemine k-ndal mündiviskel

on üksteist välistavate sündmuste süsteem?

Defineerida sündmuste $A_1,\dots,A_k$ abil üksteist välistavate sündmuste süsteem!

Kas see süsteem on täielik?

Kas sündmused $A_1,\dots,A_k$ on võrdtõenäosed?

2. Rõngal on 7 erinevat võtit. Pimedas ukse taga seistes võetakse nende hulgast üks. Kui suur on tõenäosus selleks, et see võti avab ukse luku?

3. Loteriipiletite koguarv on 10 000. Võitude hulgas on 10 suurt, 100 keskmist ja 1000 väikest võitu. Kui suur on tõenäosus võita? Kui suur on tõenäosus mitte võita?

4. Kuup, mille kõik küljed on värvitud, saetakse tuhandeks ühesuuruseks kuubiks, mis hoolikalt segatakse. Seejärel võetakse saadud hulgast üks juhuslik kuup. Leida järgnevate sündmuste tõenäosused:

A_0 - saadud kuup on värvimata külgedega;

A_1 - saadud kuubil on üks külg värvitud;

A_2 - saadud kuubil on kaks külge värvitud;

A_3 - saadud kuubil on kolm külge värvitud;

A_4 - saadud kuubil on neli külge värvitud;

$A_1 \cup A_2$; $\bar{A}_0 \cup \bar{A}_1$, $\bar{A}_4$, $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup A_3$, $A_1 A_2$, $A_1 \bar{A}_2$.

5. Lapsel, nimega Maire, on käes 27 ladina tähestiku tähte. Ta võtab nende hulgast juhuslikult 5. Kui suur on tõenäosus selleks, et ta saaks kätte oma nime tähed a) järjekorda arvestamata, b) õiges järjekorras?

6. Lapsel, kelle nimi on Viivi, on käes kaardid I,I,I, V,V. Kui suur on tõenäosus selleks, et ta kogemata laob oma nime?

7. Laps kirjutab juhuslikult tähti (ta tunneb 27 ladina tähestiku tähte). Kui suur on tõenäosus, et ta, tundmata mingeid õigekeelsusreegleid, kirjutab kogemata sõna "matemaatika"?

8. Seltskonnas on 5 noormeest ja 5 neidu, kes istuvad juhuslikus järjekorras ümber laua. Kui suur on tõenäosus

selleks, et tekiks "kirju rida"?

Igal noormehel on neidude hulgas oma sümpaatia. Kui suur on tõenäosus selleks, et iga noormees saab oma neiu lauanaabriks?

9. 8-korruselise maja lifti asus esimesel korrusel 5 inimest. Leida tõenäosus selleks, et iga reisija väljuks liftist erineval korrusel.

10. Üldise mängude hulga vähendamiseks jagati $2n$ võistkonda kahte võrdse suurusega alagruppi. Leida tõenäosus, et 2 kõige tugevamat võistkonda on erinevates alagruppides.

11. Rühm üliõpilasi, mis sisaldas $2M$ noormeest ja $2N$ neidu, jaotati kaheks võrdseks osaks. Leida tõenäosus selleks, et mõlemasse ossa sattus ühepalju noormehi.

12. Võetakse a) 3 ja b) 6 kaarti 52-kaardilisest pakist. Leida tõenäosused sündmustele:

1) nende hulgas on potiäss;

2) nende hulgas on kuningas ja äss;

3) nende hulgas on täpselt üks äss;

4) iga kaart on erineva tugevusega;

5) iga kaart on erinevast mastist;

6) nende hulgas on kõigi mastide esindajad;

7) nende hulgas on punaseid ja musti kaarte.

(Kahte kaarti loeme ühetugevuseks, kui neil on sama arv või pilt, kuid erinev mast.)

13. Leida tõenäosus selleks, et võttes 52 kaardi hulgast 3, saaksime 4, 3, 2 ühetugevust kaarti.

14. Kaardipakk, mis sisaldab 52 kaarti, segatakse korralikult läbi ja sealt võetakse 6 kaarti. Leida tõenäosused:

a) nende hulgas on potiäss,

b) kaartide hulgas on iga masti esindajaid,

c) nende hulgas on vähemalt 1 äss.

15. Leida tõenäosus selleks, et võttes 52 kaardi hulgast 4, saaks nii musti kui ka punaseid kaarte; vähemalt 3 erinevast mastist kaarti; iga kaart erinevast mastist.

16. Kaardipakis on 36 kaarti. Nende hulgast võetakse huupi kaks kaarti. Kui suur on tõenäosus selleks, et mõlemad kaardid oleksid potimastist? Et nad on mõlemad samast mastist? Sama tugevusega?

17. Leida minimaalne arv kaarte, mis tuleks võtta, et saada tõenäosusega $P \geq \frac{1}{2}$ vähemalt 2 ühetugevust kaarti?

18. Arvude $1,2,\ldots,n$ jadast valitakse juhuslikult 2 arvu. Kui suur on tõenäosus selleks, et üks neist on väiksem kui k, aga teine on suurem kui k, kus $1 < k < n$, k on meelevaldne täisarv?

19. Partii sisaldab N detaili, nende seas M praakdetaili. Võetakse juhuslikult n detaili. Kui suur on tõenäosus selleks, et nende seas on $m (\leq M)$ praakdetaili?

20. Mis on tõenäosem, kas visates korraga 4 täringut saada vähemalt üks 6, või visates 24 korda kahte täringut saada vähemalt üks kord korraga 6 ja 6? Tõestada!

§ 3. T i n g l i k t õ e n ä o s u s .

1. Tingliku tõenäosuse mõiste.

Mõnikord võib esineda olukordi, kus mingi sündmuse tõenäosus sõltub mõne teise sündmuse esinemisest (või mitte-esinemisest).

Näide 1. Vaatleme urni, mis sisaldab 5 valget ja 3 musta kuuli. Urnist võetakse juhuslikult ühekaupa kuule. Tähistame sümboliga K sündmuse, et esimene urnist võetud kuul osutub valgeks, ja sümboliga M sündmuse, et teine võetav kuul on valge.

Sündmuse K tõenäosust on lihtne leida: $P(K) = \frac{5}{8}$.

Milline on aga sündmuse M tõenäosus? Sellele küsimusele vastamiseks on meil tarvis teada, kas toimus sündmus K või $\bar{K}$: esimesel juhul oleks sündmuse M tõenäosus $\frac{4}{7}$, teisel juhul aga $\frac{5}{7}$.

Niisuguses olukorras on otstarbekas võtta kasutusele sündmuse tingliku tõenäosuse mõiste.

Sündmuse A tinglikuks tõenäosuseks tingimusel B $P(A/B)$ nimetatakse sündmuse A tõenäosust eeldusel, et sündmus B toimub (toimus).

Vaatleme nüüd, kuidas on võimalik leida sündmuste tinglikke tõenäosusi.

Olgu $P(A) = \frac{m_A}{n}$, $P(B) = \frac{m_B}{n}$, $P(AB) = \frac{m_{AB}}{n}$.

Eeldame, et sündmus B toimub (toimus). Kindlasti esineb siis üks sündmusesse B kuuluvatest elementaarsündmustest (neid on arvult m_B). Järelikult moodustavad need elementaarsündmused meie eeldusel täieliku süsteemi, s. t. uue elementaarsündmuste süsteemi.

Selleks, et saaks toimuda sündmus A, peab (meie eeldust arvestades) toimuma üks elementaarsündmustest, mis sisaldub niihästi sündmuses A kui ka sündmuses B. Et nende arv on m_{AB}, siis saamegi otsitavaks tõenäosuseks $\frac{m_{AB}}{m_B}$, seega

$$P(A / B) = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{m_{AB}}{n} : \frac{m_B}{n} = \frac{P(AB)}{P(B)} .$$

Kokkuvõttes saime seose:

$$P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)} , \tag{1}$$

mille kehtivuseks on tarvis veel eeldada, et $P(B) \neq 0$.

Seost (1) korrutisena kirjutades ja arvestades, et $P(AB) = P(BA)$, saame:

$$P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A) . \tag{2}$$

Viimane seos peab paika ka sel juhul, kui $P(A) = 0$ või $P(B) = 0$, sest sel juhul alati ka $P(AB) = 0$. (Miks?)

Näide 2. Arvutame näites 1 leitud tingliku tõenäosuse, kasutades selleks valemit (1).

Leiame selleks kõigepealt sündmuse KM tõenäosuse. Kahe kuuli võtmiseks kaheksa hulgast on erinevaid võimalusi $C_8^2 = 28$. Igaühe neist võimalustest võime lugeda elementaarsündmuseks. Sündmus KM, s. t. sündmus, et kaks esimest kuuli on valged, koosneb $C_5^2 = 10$ elementaarsündmusest. Seega

$$P(KM) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} , \quad \text{ja} \quad P(M/K) = \frac{P(KM)}{P(K)} = \frac{5}{14} : \frac{5}{8} = \frac{4}{7} .$$

Näide 3. Arvutame sündmuste korrutiste EN ja LN tõenäosused (vt. näiteid 1.1 ja 1.2):

$P(N) = \frac{1}{2}$; $P(E/N) = \frac{1}{3}$; $P(EN) = P(N)P(E/N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Teiselt poolt aga $EB = E$, seega $P(EB) = P(E) = \frac{1}{6}$.

$P(L) = \frac{1}{6}$; $P(N) = \frac{1}{2}$, kuid $P(N/L) = 0$, sest sündmuse A toimumisel ei saa sündmus B üldse toimuda. Niisiis

$$P(LN) = P(L)P(N/L) = 0 .$$

Teiselt poolt: $LN \neq \emptyset$, järelikult $P(LN) = 0$.

2. Sõltumatud sündmused.

Võib esineda ka sündmusi, mis teineteisele praktilist mõju ei avalda.

Näide 4. Olgu sündmuseks E_1 esimesel täringuviskel 6 silma saamine, sündmuseks E_2 – teisel täringuviskel 6 silma saamine. Ilmselt ei mõjusta sündmuse E_1 toimumine mingil viisil sündmuse E_2 tõenäosust.

Me ütleme, et sündmus A on sõltumatu sündmusest B, kui kehtib seos

$$P(A/B) = P(A) . \qquad (3)$$

Paigutades võrduse (3) seosesse (2), saame sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosuse leidmiseks valemi (4):

$$P(AB) = P(A)P(B) . \qquad (4)$$

Seostest (2) ja (4) saame ka järgneva võrduse:

$$P(A)P(B/A) = P(A)P(B) .$$

Siit aga järeldub

$$P(B/A) = P(B) ,$$

seega ka sündmus B on sõltumatu sündmusest A . Niisiis, alati, kui sündmus A on sõltumatu sündmusest B , on ühtlasi ka sündmus B sõltumatu sündmusest A , s. t. <u>sündmuste sõltumatus on vastastikune</u>.

<u>Näide 5</u>. Vaatleme sündmusi C ja D (näide 1.1).

$$P(C) = \frac{1}{4} ; \quad P(D) = \frac{3}{13} ; \quad P(DC) = \frac{3}{52} ; \quad P(C/D) = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{3}{13}} = \frac{1}{4} .$$

Järelikult sündmused C ja D on sõltumatud.

Näites 3 vaadeldud sündmuste paarid E ja N ning L ja N on aga sõltuvad. (Tõestada!)

3. <u>Täistõenäosuse valem</u>.

Vaatleme veel kord näites 1 esitatud küsimust: milline on teisel võttel urnist valge kuuli saamise tõenäosus. Vastuse leidsime sellele küsimusele üksnes eeldusel, et me teame, missuguse kuuli saime esimesel võttel. Milline on aga vastus juhul, kui me esimese katse tulemust ei tea?

Sel juhul saame kasutada nn. <u>täistõenäosuse valemit</u>. Tuletame selle.

Moodustagu sündmused $H_1,\dots,H_n$ täieliku süsteemi, s.t.

1) $H_i \cap H_j = \emptyset$, kui $i \neq j$;

2) $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Olgu teada kõigi sündmuste H_i tõenäosused $P(H_i)$.

Olgu A suvaline sündmus, mis võib esineda koos ühega sündmustest H_i $(i = 1,\dots,n)$.

Olgu teada tinglikud tõenäosused $P(A/H_i)$. Siis avaldub sündmuse A tõenäosus $P(A)$ järgnevalt:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i) . \qquad (5)$$

Tõestame täistõenäosuse valemi (5).

Eelduste 1) ja 2) kohaselt kehtivad seosed:

$$A = A\Omega = A\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \bigcup_{i=1}^{n} AH_i ,$$

sest iga sündmuse A võib esitada kujul $A\Omega$ ja

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i) ;$$

et $H_iH_j = \emptyset$, siis ammugi $AH_i \cap AH_j = \emptyset$, ning me saame rakendada tõenäosuste liitmise teoreemi. Viimase võrduse saame aga tõenäosuste korrutamise teoreemi põhjal.

Näide 6. Leiame lõpliku vastuse näites 1 esitatud küsimusele. Selleks tuleb meil vaadelda täielikku sündmuste süsteemi $\{K,\bar{K}\}$; $P(K) = \frac{5}{8}$; $P(\bar{K}) = \frac{3}{8}$; $P(M/K) = \frac{4}{7}$; $P(M/\bar{K}) = \frac{5}{7}$.

Otsitav tõenäosus $P(M)$ avaldub siis selliselt:

$$P(M) = P(K) \cdot P(M/K) + P(\bar{K})P(M/\bar{K}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{35}{56} .$$

4. Bayesi valem.

Näide 7. I urnis on 3 musta ja 5 valget kuuli;
II urnis on 4 musta kuuli;
III urnis on 6 musta ja 1 valge kuul.

Juhuslikult valiti üks urn ning võeti sellest juhuslikult üks kuul. Kuul osutus valgeks. Kui suur on tõenäosus, et see võeti I urnist (s.t., juhuslikult valitud urn osutus I urniks); II urnist; III urnist?

Otsekohe võime öelda, et tõenäosus selleks, et kuul pärines II urnist, on null (seal ju valgeid kuule polnudki). Võib ka arvata, et tõenäosus selleks, et kuul võeti I urnist, on suurem kui tõenäosus selleks, et see võeti III urnist. Kuidas aga leida täpne vastus esitatud küsimustele?

Oletame, et on antud täielik sündmuste süsteem $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$, kusjuures me eeldame, et tõenäosused $P(H_i)$ (nn. aprioorsed tõenäosused) on meil teada.

Olgu A sündmus, mis võib esineda koos ühega sündmustest H_i $(i=1,2,\ldots,n)$; olgu teada tinglikud tõenäosused $P(A/H_i)$. Nende abil tahame leida sündmuste H_i tinglikud tõenäosused sündmuse A suhtes, nn. aposterioorsed tõenäosused $P(H_i/A)$.

Kehtib nn. Bayesi valem:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} .$$

Tõestus. Kasutades tingliku tõenäosuse definitsiooni:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_iA)}{P(A)} ,$$

teisendame lugejat tõenäosuste korrutamise valemi abil:

$$P(H_iA) = P(H_i)P(A/H_i) ,$$

nimetajas aga kasutame täistõenäosuse valemit (5).

Näide 8. Lahendame nüüd näites 7 esitatud ülesande.

Täieliku sündmuste süsteemi moodustavad sündmused:

H_1 - kuul võeti I urnist;

H_2 - kuul võeti II urnist;

H_3 - kuul võeti III urnist.

Ilmselt $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Sündmuseks A on valge kuulikese saamine. Leiame vajalikud tinglikud tõenäosused:

$$P(A/H_1) = \frac{3}{8} \; ; \quad P(A/H_2) = 0 \; ; \quad P(A/H_3) = \frac{1}{7} .$$

Siis

$$P(H_1/A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{29}{56}} = \frac{21}{29} \; ;$$

$$P(H_2/A) = \frac{0}{\frac{29}{56}} = 0 \; ;$$

$$P(H_3/A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{29}{56}} = \frac{8}{29} .$$

Kontrollimiseks kasutame asjaolu, et sündmused $H_1, H_2, \ldots$ $\ldots, H_n$ moodustavad täieliku sündmuste süsteemi ka tingimusel, et A toimus, seega $\sum_{i=1}^{n} (H_i/A) = 1$. Tõepoolest, meie näites $\frac{21}{29} + \frac{8}{29} = 1$.

5. Ülesandeid.

1. Kas teineteist välistavad sündmused on sõltuvad või sõltumatud?

2. Kas sellest, et sündmus A sõltub sündmusest B, järeldub, et sündmus B sõltub sündmusest A ?

3. Kas leidub sündmusi, mis on kõigist ülejäänutest sõltumatud? (Tõestada!)

4. Olgu A ja B kaks teineteist välistavat sündmust, mis on mõlemad sündmusest C sõltumatud. Kas sündmus $A \cup B$ on samuti sündmusest C sõltumatu? Tõestada!

5. Olgu A ja B kaks suvalist sündmust, mis on mõlemad sündmusest C sõltumatud. Kas on siis alati $A \cup B$ sõltumatu sündmusest C ?

Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et $A \cup B$ oleks sündmusest C sõltumatu!

6. Kas sellest, et $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, järeldub, et sündmused A , B ja C on paarikaupa sõltumatud? Tõestada!

+

1. Olgu $p = P(A)$, $q = P(B)$, $r = P(A \cup B)$. Avaldada $P(A\bar{B})$, $P(\overline{AB})$, $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ p, q ja r kaudu.

2. On teada, et $A_1A_2 \subset A$. Tõestada seos $P(A) \geqslant P(A_1) + P(A_2) - 1$.

3. Tõestada, et $P(A_2/A_1) \geqslant 1 - \dfrac{P(\bar{A}_2)}{P(A_1)}$.

4. Tõestada, et sündmuste A , B ja C paarikaupa sõltumatusest ei järeldu nende täielik sõltumatus.

5. A , B ja C on paarikaupa sõltumatud sündmused; $P(A) = P(B) = P(C)$, $P(ABC) = 0$. Leida $\max P(A)$.

6. Tõestada seos:

$$P(A/B) = P(A/BC)P(C/B) + P(A/B\bar{C})P(\bar{C}/B) .$$

7. Tõestada teoreem: r ühesugust eset saab paigutada n lahtrisse C^r_{n+r-1} viisil.

8. Olgu $f(x_1,\ldots,x_n)$ analüütiline n muutuja funktsioon. Mitu erinevat r järku tuletist tal eksisteerib?

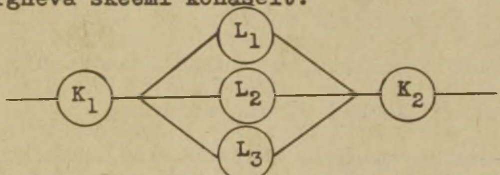
9. Mitmel erineval viisil saab n taldrikule paigutada r õunakooki ja s kohupiimakooki?

+

1. Kaks laskurit tulistasid üht märklauda. Esimene laskur tabab märki tõenäosusega 0,7, teine tõenäosusega 0,8. Leida tõenäosus, et märki tabatakse, kui kumbki tulistab a) üks kord; b) kaks korda.

2. Kolm lampi on lülitatud järjestikku. Pinge tõstmisel on nende läbipõlemise tõenäosused 0,3 , 0,2 ja 0,2 . Leida tõenäosus selleks, et pärast pinge tõstmist säiliks vooluahelas vool (selleks peavad kõik lambid jääma põlema).

3. Elektrivoolu ahel punktide A ja B vahel on moodustatud järgneva skeemi kohaselt:



Aja T jooksul on elementide riknemise tõenäosused järgnevad: elemendil K_1 - 0,1 ; elemendil K_2 - 0,2 ; elemendil L_1 - 0,4 ; elemendil L_2 - 0,7 ; elemendil L_3 - 0,5 .

Leida voolu katkemise tõenäosus ajavahemiku T vältel.

4. Tõenäosus lambi läbipõlemiseks 1000 tunni vältel on 0,8. Leida tõenäosus selleks, et kolmest sellisest lambist vähemalt üks veel 1000 tunni möödudes põleks.

5. Loteriil on N piletit, neist võidab n piletit. Ostetakse $k \leqslant n$ piletit. Leida vähemalt ühe piletiga võitmise tõenäosus.

6. Garderoobis on $2n$ paari kalosse.

a) Olgu need kõik ühesugused ja ühesuurused. Nende hulgast valitakse juhuslikult $2m$ kalossi. Leida sündmuste B_i tõenäosused, kus B_i tähendab, et võetud kalosside hulgas on i paari $(i=0,1,2,\ldots,m;\ 2m \leqslant n)$.

b) Olgu kõik $2n$ kalossipaari erinevad.

Leida sündmuste A_i $(i=0,1,\ldots,m)$ tõenäosused, kus A_i tähendab, et juhuslikult võetud $2m$ kalossi hulgas on i õiget paari $(2m \leqslant n)$.

7. Kaks võrdselt osavat laskurit tulistavad kordamööda märklauda, kusjuures kummalgi on õigus lasta kaks korda. Esimene tabaja saab auhinna.

a) Olgu tabamise tõenäosus $p = \frac{1}{5}$. Mis on tõenäosem, kas auhind antakse välja või mitte?

b) Leida tõenäosus selleks, et esimene laskur saab auhinna; tõenäosus selleks, et teine laskur saab auhinna; tõenäosus selleks, et kumbki ei saa auhinda.

c) Vastata samadele küsimustele juhul, kui mõlema laskuri korral on tabamise tõenäosus $p = \frac{1}{3}$.

8. Loteriipilet võidab tõenäosusega 0,02. Leida vähemalt 1 piletiga võitmise tõenäosus, kui ostetakse 2, 3, 4, 5 piletit.

9. Kaks spordiseltsi A ja B on kumbki esindatud 3 võistkonnaga (mehed, naised, noored).

A meeskond võidab 80%-lise tõenäosusega.

A naiskond võidab 40%-lise tõenäosusega.

A noortevõistkond võidab 40%-lise tõenäosusega.

Kumma spordiseltsi võit on tõenäosem (võitjaks loetakse see, kes saavutab vähemalt 2 võitu 3-st)?

10. Abonent unustas telefoninumbri viimase numbri ja valib selle juhuslikult. Leida tõenäosus selleks, et tal ei tule helistada üle 3 korra.

11. Visatakse kolme täringut. Leida tõenäosus selleks, et neist vähemalt ühel langes peale 6 silma, kui on teada, et igal täringul langes peale erinev arv silmi.

12. Urnist, mis sisaldab 3 valget ja 2 musta kuuli, võetakse 2 kuuli ja pannakse urni, mis sisaldab 4 musta ja 4 valget kuuli; seejärel võetakse sealt 1 kuul. Leida tõenäosus selleks, et see kuul on valge.

13. Üliõpilane läks eksamile, olles 25 kordamisküsimuse hulgast 20 selgeks õppinud. Talle esitati 3 küsimust. Leida tõenäosus selleks, et ta oskas kõigile vastata.

14. Eksamil oli 25 küsimust.

30 üliõpilasest 5 õppis selgeks kõik ,

10	"	"	20 ,
10	"	"	15 ,
5	"	"	10 .

Leida iga rühma üliõpilaste jaoks tõenäosus saada hinne 5, 4, 3 ja 2.

15. Krossirajal tuli mootorratturil läbida teelõik AB, kus oli 12 takistust, neist igaühe juures oli tõenäosus

võistluse katkestamiseks 0,1 ; ülejäänud teelõigu BC läbimise tõenäosus oli 0,7. Leida tõenäosus selleks, et mootorrattur läbib kogu võistlustrassi AC .

16. Kastis oli 15 tennisepalli, nende seas 9 uut. I mängu jaoks võetakse juhuslikult 3 palli ja pannakse need pärast mängu tagasi. II mängu jaoks võetakse jälle juhuslikult 3 palli. Leida tõenäosus selleks, et need on kõik uued.

17. I tööpingil valmistatud detail on mittekvaliteetne tõenäosusega 0,2, II tööpingil valmistatud detail aga tõenäosusega 0,3. I pingi töökiirus on 2 korda suurem kui teisel. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult valitud detail oleks kvaliteetne.

18. Tehnilise kontrolli osakonda saabus partii tooteid kolmes kastis. Nende kastide hulgast kontrolliti ühte. Leida tõenäosus selleks, et partii tunnistati praagiks, kui I kastis oli 2/3 praaktooteid, ülejäänud kahes aga kõik kvaliteetsed tooted.

19. Kaks mängijat A ja B viskavad kordamööda münti. Võidab see, kes saab enne vapi. Leida A võidu tõenäosus, kui ta alustab esimesena.

20. Rahakotis on 10 20-kopikalist, 5 15-kopikalist ja 2 10-kopikalist münti. Kui suur on tõenäosus selleks, et huupi võetud 6 mündi väärtuste summa on vähem kui 1 rubla?

21. 5 % mehi ja 0,25 % naisi on värvipimedad. Vaatlusalune isik osutus värvipimedaks. Leida tõenäosus selleks, et ta on mees a) eeldades, et mehi ja naisi on ühepalju; b) oletades, et ta õpib ülikoolis, kus üliõpilastest 66,7 % on naised.

22. 18 laskuri hulgast 5 tabas märki tõenäosusega 0,8, 7 - tõenäosusega 0,7, 4 - tõenäosusega 0,6 ja 2 - tõenäosusega 0,5. Juhuslikult valitud laskur tulistas, kuid ei tabanud märki. Leida tõenäosus tema kuulumiseks igasse vaadeldavasse rühma.

23. Koolipoiss, kes tahtis oma sõprade üle nalja heita, korjas kokku kõik mütsid garderoobist, kus neid oli n tükki, ja riputas juhuslikult tagasi. Leida tõenäosus P_n selleks, et vähemalt üks sattus õigesse kohta tagasi. Leida $\lim_{n \to \infty} P_n$.

§ 4. Geomeetriline ja statistiline tõenäosus.

1. Elementaarsündmuse mõiste üldistamine.

Praktiliselt esineb sageli katseid, mille puhul erinevate võimalike katsetulemuste arv on lõpmata suur.

Näide 1. Vaatleme märklauda, millesse tulistatakse punktikujuliste kuulidega (või arvestame reaalse kuuli korral tema keskpunkti tabamust).

Märklaua iga punkti tabamist võime vaadelda erineva katsetulemusena. (Seega katsetulemuste hulk on lõpmata suur; samuti on lõpmata suur katsetulemuste abil kirjeldatavate erinevate sündmuste hulk. (Miks?) Kahjuks pole nende tõenäosusi võimalik määrata, kasutades klassikalist tõenäosuse definitsiooni. (Miks?)

Et anda üldisemat tõenäosuse definitsiooni, üldistame kõigepealt elementaarsündmuse mõiste.

Sündmust A nimetatakse <u>elementaarsündmuseks</u>, kui ei leidu selliseid sündmusi

$$A_1 \neq A \quad \text{ja} \quad A_2 \neq A,$$

et kehtiks seos

$$A = A_1 \cup A_2 .$$

Lõplikku või lõpmatut sündmuste süsteemi $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$, kus mistahes kaks sündmust A_{α_1} ja A_{α_2} on elementaarsündmused ja välistavad üksteist, ning

$$\bigcup A_\alpha = \Omega ,$$

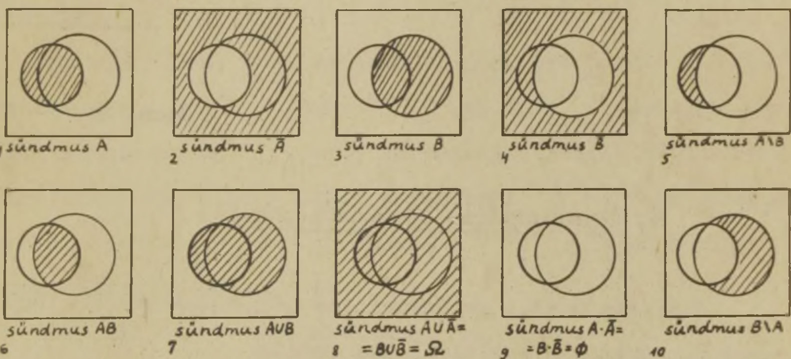
nimetatakse <u>elementaarsündmuste süsteemiks</u> (laiemas mõttes).

Näites 1 on tasandi iga üksiku punkti tabamine elementaarsündmuseks. Seega on elementaarsündmuste hulk selles näites lõpmata suur.

2. <u>Geomeetriline tõenäosus tasandil.</u>

Teeme kõigepealt lihtsustava eelduse: oletame, et kõik elementaarsündmused on võrdtõenäosed. (Siin kasutatakse võrdtõenäosuse mõistet mõnevõrra üldisemalt kui varem, sest vaadeldakse elementaarsündmusi, mille tõenäosus on 0). Antud näites tähendab see, et märklaua kõigi punktide tabamine on võrdvõimalik, s. t. ühegi punkti tabamine ei ole tõenäosem mingi teise punkti tabamisest. See aga tähendab, et märklaua mingi osa tabamine sõltub ainult selle osa pindalast, mitte tema asukohast märklaual.

Eeldame, et igale elementaarsündmusele on seatud vastavusse mingi punkt tasandil, kusjuures kõigi elementaarsündmuste hulgale vastab tasandiline piirkond, millel eksisteerib pindala. Siis vastab igale elementaarsündmuste abil defineeritud sündmusele teatav punktihulk tasandil; vaatleme ainult selliseid sündmusi, millele vastavate elementaarsündmuste hulk kirjeldab pindala omava piirkonna tasandil. Niisuguse sündmuse võime defineerida <u>vaadeldava tasandipiirkonna tabamisena</u> (juhuslikul viskel). Sündmuste sellise interpretatsiooni korral vastavad sündmustevahelistele seostele analoogilised seosed hulkade vahel (vt. joonis 1). Sellistele sündmustele saame omistada <u>geomeetrilise tõenäosuse</u>.



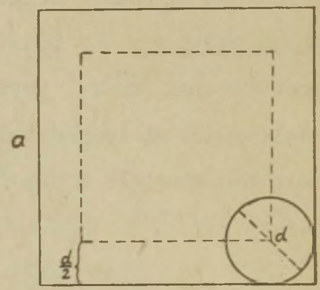
Joon. 1.

Tabatagu mingit juhuslikult valitud punkti, mis kindlasti paikneb tasandilisel pinnaosal pindalaga S . Tõenäosus selleks, et tabatav punkt asub sellel pinnaosal paiknevas piirkonnas pindalaga s , võrdub suhtega $\frac{s}{S}$.

<u>Näide 2</u>. <u>Ülesanne</u>: Ruudukujulisele märklauale külje-

pikkusega a visatakse ring diameetriga d . Milline peaks olema a ja d suhe selleks, et ringi keskpaiga sattumisel märklauale satuks tõenäosusega $\frac{1}{2}$ märklauale ka ringi iga punkt (vt. joonis 2)? Selleks märgime märklaua keskele ruudu servapikkusega a-d . Selleks, et ringi iga punkt satuks märklauale, peaks ringi keskpunkt langema sisemisesse ruutu. Pikkuste a ja d otsitava suhte leiame seosest

$$(a-d)^2 = \frac{1}{2} a^2 .$$



Joon. 2.

3. Geomeetriline tõenäosus ruumis.

Üldisemalt võib geomeetrilise tõenäosuse mõiste defineerida suvalises eukleidilises ruumis.

Tabatagu mingit juhuslikku punkti, mis kindlasti paikneb ruumiosas Ω ruumalaga V . Tõenäosus selleks, et tabatav punkt asuks selles ruumiosas paiknevas ruumiosas A ruumalaga v , on $\frac{v}{V}$.

Kõveral oleks geomeetrilise tõenäosuse mõiste järgmine: Tabatagu mingit juhuslikku punkti, mis kindlasti paikneb kõvera kaarel Ω pikkusega L . Tõenäosus selleks, et tabatav punkt asub selle kaare osal A pikkusega l , on $\frac{l}{L}$.

Näeme, et geomeetrilise tõenäosuse korral on iga üksiku punkti tabamise tõenäosus alati 0 (miks?), seega, lugedes elementaarsündmusteks üksikute punktide tabamise tõenäosusi, veendume, et iga elementaarsündmuse tõenäosus on 0 .

Samuti on 0 ainult lõplikust või ka loenduvast hulgast elementaarsündmustest koosneva sündmuse geomeetriline tõenäosus. (Miks?)

Tuleb märkida, et geomeetrilist tõenäosust ei saa omistada kaugeltki iga hulga B tabamisele. Selleks on nõutav, et vaadeldaval hulgal B eksisteeriks ruumala (pindala, kaarepikkus).

Iga ruumiosast Ω väljaspool paikneva hulga A tabamise tõenäosus on 0. (Miks?) Kui aga hulk A paikneb osaliselt ruumiosas Ω , siis on võimalik leida hulga A tabamise tõenäosus ainult siis, kui hulgal $\Omega \cap A$ eksisteerib ruumala. Olgu hulga $\Omega \cap A$ ruumala v' , siis on otsitav geomeetriline tõenäosus $\frac{v'}{v}$.

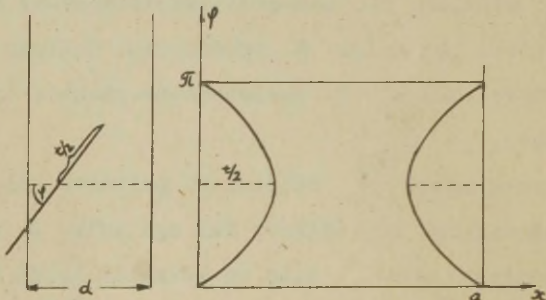
Kui hulk A langeb ühte kogu ruumiosaga Ω või erineb sellest ainult lõpliku või loenduva hulga punktide võrra, siis on selle tabamise tõenäosus 1 . (Miks?)

Sõnastada ülaltoodud laused geomeetrilise tõenäosuse jaoks tasandil ja kõveral!

Geomeetrilise tõenäosuse abil lahendatavatest ülesannetest on klassikaliseks saanud nn. Buffoni nõelaülesanne. Esitame selle.

4. Buffoni nõelaülesanne.

Katku tasandit paralleelsirged, kusjuures naabersirgete vahekaugus olgu $2a$. Tasandile visatakse juhuslikult nõel pikkusega $2t (t < a)$ (vt. joonis 3). Leida tõenäosus selleks, et nõel lõikub mõnega tasandil paiknevaist paralleelidest.



Joon. 3.

Lahendus. Nõela asend talle lähima paralleeli suhtes on üheselt määratud kahe parameetriga (tõenäosus selleks, et ta paikneb kahest paralleelist võrdsel kaugusel, on 0 - miks? Seetõttu võime selle juhu jätta vaatlemata.) Nendeks parameetriteks on nõela keskpunkti kaugus x talle lähimast sirgest $(0 \leqslant x < a)$ ja nõela ning paralleelsirgete vaheline nurk φ $(0 \leqslant \varphi < \pi$; loeme niihästi nõelal kui ka sirgetel mingil viisil fikseerituks positiivse suuna ning määrame nurga φ nende positiivsete suundade vahel).

Lõikumine toimub, kui kehtib võrratus

$$0 \leqslant x \leqslant t \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \qquad (1)$$

Nõela kõikvõimalikele asenditele vastab ristkülik x/φ-tasandil, mille pindala on $a\pi$; nõela ja paralleelide lõikumisele vastavateks elementaarsündmusteks on sellised x/φ-tasandi punktid, mis paiknevad piirkonnas, mis on määratud võrratustega (1). Selle piirkonna pindala on

$$s = \int_0^{\pi} t \sin\varphi \, d\varphi = 2t .$$

Otsitava tõenäosuse väärtuseks saame seega $\frac{2t}{a\pi}$.

5. <u>Bertrandi paradoks</u>.

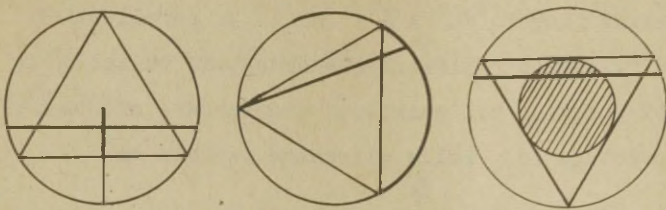
Tuleb aga märkida, et mõningate ülesannete korral on võimalik ühele sündmusele määrata geomeetriline tõenäosus mitmel erineval viisil, sõltuvalt sellest, millised sündmused me valime elementaarsündmusteks ning loeme seega võrdtõenäosteks.

Näiteks selle kohta on klassikaline nn. Bertrandi paradoks, mis omal ajal põhjustas matemaatikute seas palju vaidlusi.

<u>Ülesanne</u>. Ringile joonestatakse juhuslikult kõõl. Kui suur on tõenäosus, et see kõõl on pikem kui ringi joonestatud võrdkülgse kolmnurga külg?

<u>1. lahendus</u>. Sümmeetria tõttu võime vaadelda ainult ühesuunalisi kõõle, mis on määratud oma keskpunktiga diameetril (vt. joonis 4a). Meie tingimust rahuldavad ainult

need kõõlud, mille keskpunkt asub ringi keskpunktist kaugusel $x \leq \frac{r}{2}$, seega on otsitav tõenäosus $\frac{1}{2}$.



Joon. 4.

<u>2. lahendus</u>. Sümmeetria tõttu võime vaadelda ainult neid kõõle, mille üks otspunkt on fikseeritud; need on määratud oma teise otspunktiga. Ülesande tingimust rahuldavad ainult need kõõlud, mille otspunkt satub jämedama joonega märgitud osale ringjoonest joonisel 4b; kuna see on $\frac{1}{3}$ kogu ringjoone pikkusest, siis on otsitav tõenäosus $\frac{1}{3}$.

<u>3. lahendus</u>. Kõõl on määratud oma keskpunktiga. Meie tingimust rahuldavad üksnes sellised kõõlud, mille keskpunkt asub ringi keskpunktist kaugusel $x \leq \frac{r}{2}$, s. t., mille keskpunkt asub ringis, mille pindala on $\frac{\pi r^2}{4}$ (joonis 4 c). Otsitav tõenäosus on seega $\frac{1}{4}$.

Milles on viga? Kuidas saab ühe ja sama sündmuse tõenäosus tulla erinev sõltuvalt erinevast arvutusviisist?

Põhjuseks on siin see, et erinevates lahendustes on erinevatel viisidel valitud elementaarsündmuste süsteemid. Seda, millisel viisil valitud elementaarsündmuste süsteem osutub ülesande lahendamisel sobivaimaks, ei ole võimalik otsustada tõenäosusteooria vahenditega, sest selle küsimuse vastus sõltub sellest, missugused sündmused on võrdtõenäosed, viimane mõiste ei ole aga meie käsitluses matemaatiliselt defineeritud.

6. Geomeetrilise tõenäosuse abil lahendatavaid ülesandeid.

Geomeetrilist tõenäosust on otstarbekas rakendada ka mitmete ülesannete lahendamisel, mis oma probleemiseadelt ei olegi geomeetrilise iseloomuga. Oluliseks momendiks on siin see asjaolu, et sellistes ülesannetes on kõikvõimalike elementaarsündmuste hulk mingil viisil vastavusse seatav kas lõigu, pinna- või ruumiosa punktide hulgaga, ning kõik elementaarsündmused on võrdtõenäosed.

Üks tüüpilisi geomeetrilise tõenäosuse abil lahendatavaid ülesandeid on järgmine, nn. "kohtumise ülesanne".

Kaks isikut A ja B leppisid kokku, et kohtuvad kella 12.oo ja 13.oo vahel teatud kohas. Kumbki pidi teist ootama 20 minutit. Leida tõenäosus, et kohtumine toimub.

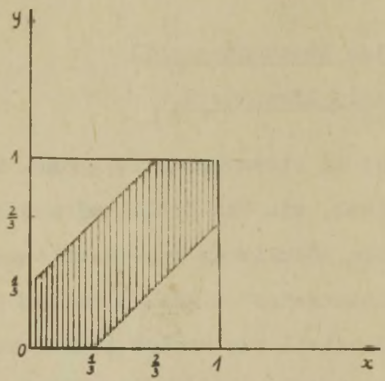
Me võime eeldada, et isikute saabumine igal üksikul momendil on võrdvõimalik saabumisega mingil teisel momendil. Samuti ei mõjusta ühe isiku saabumishetk mingil määral teise isiku saabumishetke.

Selgitame ülesannet graafiku abil (vt. joonis 5). Teljele x kanname isiku A võimalikud saabumismomendid, teljele y isiku B võimalikud saabumismomendid. Seega on meil igale elementaarsündmusele seatud vastavusse punkt tasandil. (Kuidas?)

Isikud kohtuvad juhul, kui

$$|x - y| < \frac{1}{3}.$$

Seda olukorda kirjeldab viirutatud pindalale kuuluvate punktide hulk joonisel. Ülesande lahendamiseks tuleb vaid leida viirutatud osa pindala ning selle pindala suhe kõikvõimalikke elementaarsündmusi kirjeldava ruudu pindalasse. On lihtne näha, et otsitav tõenäosus on



Joon. 5.

$$P = \frac{1-(\frac{2}{3})^2}{1} = \frac{5}{9}.$$

7. Statistiline tõenäosus.

Praktikas kohtume sageli ka selliste sündmustega, mis avalduvad lõpmatusse elementaarsündmuste süsteemi kuuluvate elementaarsündmuste kaudu, kusjuures pole alust eeldada, et vaadeldavad elementaarsündmused on võrdtõenäosed.

Sel juhul puudub meil üldiselt võimalus sündmuste tõenäosuse arvutamiseks teoreetilistest kaalutlustest lähtudes.

Kui meil on aga võimalik teostada korduvalt katseid, mille tulemusena vaadeldav sündmus võib esineda või ka mitte esineda, saame määrata meid huvitava sündmuse <u>suhtelised sagedused</u> $\frac{k_n}{n}$ katseseeria pikkuse n mitmesugustel väärtustel.

Tähistame sündmuse A esinemise suhtelise sageduse n katsest koosneva katseseeria korral $h_n(A) = \frac{k_n}{n}$.

On lihtne kontrollida, et kehtivad järgmised seosed:

1^o $0 \leqslant h_n(A) \leqslant 1$ iga A ja n korral (põhjendada!);

2^o $h_n(\Omega) = 1$ iga n korral (põhjendada!);

3^o Kui A ja B on üksteist välistavad sündmused, $A \cap B = \emptyset$, siis $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$.

Osutub, et kui meil on mingi sündmuste klassi $\mathcal{A}$ igale sündmusele A omistatud arv $h(A)$, mis rahuldab tingimusi 1^o - 3^o, on sellel arvul $h(A)$ ka kõik klassikalise tõenäosuse olulised omadused (vt. 2.2 - 2.4; 3.1 - 3.4).

Seega võime sündmusele, mille jaoks saame määrata suhtelise sageduse, omistada tõenäosuse, lugedes selleks suhtelise sageduse.

Kuna n muutudes suhteline sagedus muutub, ei ole sellisel viisil määratud tõenäosus ühene.

Mõnikord võib esineda olukord, kus jada $h_n(A)$ läheneb mingile piirväärtusele

$$\lim_{n \to \infty} h_n(A) = h(A) .$$

Sel juhul nimetatakse piirväärtust $h(A)$ sündmuse A <u>statistiliseks tõenäosuseks</u>.

Tuleb aga märkida, et statistilise tõenäosuse täpset arvulist väärtust ei ole põhimõtteliselt võimalik määrata, sest kunagi ei saa korraldada lõpmata pikka katseseeriat; selle asemel on aga võimalik vastavalt suvalisele etteantud arvule ε määrata katseseeria pikkus $N(\varepsilon)$ nii, et sündmuse A suhteline sagedus $h_n(A)$ erineb väga suure (s. t. arvule 1 lähedase) tõenäosusega piirväärtusest $h(A)$ vähem kui ε võrra.

Enamus tõenäosusteooria praktilisi rakendusi kasutabki nimelt statistilist tõenäosust, kusjuures selle väärtuseks valitakse kas suhteline sagedus $h_n(A)$ katseseeria mingi pikkuse n korral või sellest ümmardamise teel saadud arv.

Tõenäosusteooria seisukohalt on iga sündmuse tõenäosust võimalik statistiliselt määrata; selleks tuleb vaid vajalik arv kordi realiseerida sündmuse eelduseks olev tingimuste kompleks S ning registreerida sündmuse suhteline sagedus (sündmuste kompleksi korduva realiseerimise füüsilise võimalikkuse kontrollimine ei kuulu muidugi tõenäosusteooria kompetentsi). Seega võime edaspidi rääkida iga (meile vajaliku) sündmuse tõenäosusest, pööramata tähelepanu sellele, mil viisil on see tõenäosus määratud või kas see on üldse määratav.

Näide 4. Pikaajaliste vaatluste tulemusena on kindlaks tehtud, et vastsündinute hulgas on 52 % poisslapsed. Seega võime öelda, et poisslapse sündimise statistiline tõenäosus on 0,52.

Märgime siin, et ka statistilise tõenäosuse puhul on kindla sündmuse tõenäosus 1 (miks?), võimatu sündmuse tõenäosus 0 (miks?), kuid sündmus, mille tõenäosus on 0, ei tarvitse olla võimatu (põhjendada!) ja sündmus, mille tõenäosus on 1, pole tingimata kindel (põhjendada!). Kehtib ka üldine tõenäosuste liitmise lause (põhjendada!), jääb jõusse tingliku tõenäosuse definitsioon ja sõltumatuse määratlus.

8. Ülesandeid.

1. Tõenäosusega 1 tabatakse mingit kuubis paiknevat punkti. Kui suur on tõenäosus selleks, et tabatav punkt asub ühel kuubi diagonaaltasanditest?

2. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult valitud reaalarv on ratsionaalarv.

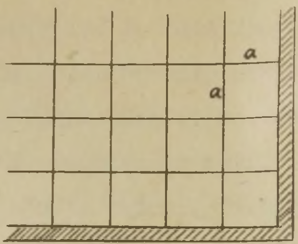
3. Tee pikkus on M km. Tee ääres mingis punktis asub vaatamisväärsus A. Teest m km asfalteeriti. Leida tõenäosus, et asfalteeriti vaatamisväärsuse kohal asuv teeosa.

4. Telefoniliinil pikkusega L toimus avarii. Leida tõenäosus selleks, et selle avarii koht asub ühele otspunktidest lähemal kui l.

5. Ringi on joonestatud ruut, mille tipud paiknevad ringjoonel. Kui suur on tõenäosus, et juhuslikult ringi visatud punkt asetseb ruudus?

6. Aken on kaetud võrega, (vt. joonis 6) mille varbade vaheline kaugus on a (varbade jämedus olgu tühiselt väike). Aknasse visatakse huupi pall raadiusega r $(r < \frac{a}{2})$. Leida akna purunemise tõenäosus (pall läbib võre).

7. Ringis raadiusega R valitakse juhuslikult punkt. Leida tõenäosus selleks, et see asub ringi keskpunktile lähemal kui r $(r < R)$.



Joon. 6.

8. Tasandil paiknevad paralleelid vahekaugusega $2a$. Tasandile visatakse juhuslikult münt raadiusega $r < a$. Kui suur on tõenäosus selleks, et münt ei lõiku ühegi sirgega?

9. Maja on 20 m pikk ja 7 m kõrge. Fassaadil on 6 akent mõõtmetega 1,2 m × 1,4 m ja 4 akent mõõtmetega 1,8 m × 1,4 m. Maja pihta visati huupi pall läbimõõduga 0,3 m. Leida tõenäosus, et see pall lendas aknast sisse.

10. Kaks isikut lepivad kokku kohtuda teatavas kohas ajavahemiku T vältel. Leida tõenäosus selleks, et kummalgi ei tule teist oodata kauem kui ajavahemik t $(t < T)$.

11. 2 aurikut sõidavad samal kuupäeval juhuslikul kellaajal sadamasse. Leida tõenäosus selleks, et nad kohtuvad sadamas, kui esimene aurik seisab sadamas 1 tunni, teine 2 tundi.

12. Latt pikkusega l murtakse juhuslikult kolmeks tükiks. Leida tõenäosus selleks, et neist tükkidest saaks moodustada kolmnurga; võrdkülgse kolmnurga; võrdhaarse kolmnurga.

13. Võetakse kolm juhusliku pikkusega lõiku, mis on lü-

hemad kui 1 . Kui suur on tõenäosus selleks, et nendest saab moodustada kolmnurga?

14. Ruudus tippudega (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) valitakse juhuslikult punkt (ξ, η). a) Tõestada, et $0 \leq x$, $y \leq 1$ korral

$$P(\xi < x; \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y) = xy .$$

Olgu $0 < z < 1$. Leida

b) $P(|\xi - \eta| < z)$,

c) $P(\xi\eta < z)$,

d) $P(\min(\xi, \eta) < z)$,

e) $P(\max(\xi, \eta) < z)$,

f) $P(\frac{1}{2}(\xi + \eta) < z)$.

15. Leida tõenäosus selleks, et võrrandi

$$x^2 + \xi x + \eta = 0$$

juured oleksid reaalsed, kui ξ ja η on määratud eelmise ülesandega.

16. Osake liigub mööda sirget sammhaaval; n-nda sammu pikkus olgu a_n , $0 \leq a_n < 1$, kusjuures sammu pikkus on juhuslik. Leida tõenäosus selleks, et osake ületab punkti 1 a) esimese sammuga; b) teise sammuga; c) kolmanda sammuga; d) n-nda sammuga.

§ 5. Juhuslik suurus.

Mõningate probleemide vaatlemisel ei piisa sellest, kui tehakse kindlaks ühe või teise sündmuse esinemine (ja selle tõenäosus). Sageli on tarvis teatavate sündmuste esinemisega siduda ka mõningaid kvantitatiivseid suurusi. Selline on olukord juhuslike suuruste korral.

1. Juhusliku suuruse mõiste.

Praktikas esineb tihti muutuvaid suurusi, mis sõltuvalt juhusest omandavad mitmesuguseid erinevaid arvulisi väärtusi.

Näide 1. Mängitakse "kulli ja kirja". Esimene mängija annab teisele 1 kopika, kui mündile langeb peale vapipool, ning saab teiselt mängijalt 1 kopika, kui mündile langeb peale kirjapool.

Esimese mängija saadav rahasumma X sõltub sellest, missugune kahest elementaarsündmusest:

V - langeb peale vapipool,

K - " " kirjapool

esineb; kui esineb V, omandab X väärtuse -1, kui esineb K, omandab X väärtuse $+1$.

Niisuguseid suurusi nimetatakse juhuslikeks suurusteks. Juhuslik suurus on seega elementaarsündmuse funktsioon (kusjuures üldiselt tuleb elementaarsündmusi mõista laiemas mõttes, vt. punkt 4.1).

Näide 2. Vaatleme mingi mõõteriista osuti liikumist skaalal. Lugedes skaalat kõvera kaareks, mille mingit punkti kindlasti tabatakse (osuti langeb sellesse punkti), saame igale punktile seada vastavusse elementaarsündmuse. Siinjuures me ei tarvitse eeldada, et kõigi punktide tabamise tõenäosused on võrdsed (nagu see oli geomeetrilise tõenäosuse korral).

Juhuslikuks suuruseks X , mille väärtus sõltub sellest, milline elementaarsündmus esineb, on mõõteriista lugem.

2. Juhusliku suuruse jaotus.

Juhuslikku suurust iseloomustab kõigepealt tema võimalike väärtuste hulk. Kuid sellest üksi ei piisa juhusliku suuruse igakülgseks iseloomustamiseks.

Näide 3. Olgu loteriipiletite koguarv 10 000; nende seas on 1000 üherublast võitu, 100 10-rublast võitu, 10 100-rublast võitu ja 1 1000-rublane võit.

Valime juhuslikult ühe pileti. Sellele piletile langev võidusumma on juhuslik suurus, mille tähistame tähega Y . Ilmselt on meil võimalikud järgmised sündmused:

A : piletile ei lange võitu,
B : " langeb 1-rublane võit,
C : " " 10-rublane võit,
D : " " 100-rublane võit,
E : " "1000-rublane võit.

Vastavalt sellele, kas toimub sündmus A , B , C , D või E , omandab juhuslik suurus Y väärtuse 0, 1, 10, 100 või 1000.

Kujutleme teist loteriid, millel on samuti 10 000 piletit ning võimalikud võidusummad on samuti 0, 1, 10, 100 ja 1000, milledest igaüks langeb 2000-le piletile.

Ka sel juhul on mingi piletiga võidetud summa juhuslik suurus, mille tähistame seekord sümboliga Z .

Juhuslikel suurustel Y ja Z on sama väärtuste hulk. Ometi on nad oluliselt erinevad!

Täielikumat informatsiooni juhusliku suuruse kohta annab tema jaotus. Olgu X lõpliku hulga väärtustega juhuslik suurus; tähistame tema poolt omandatavad väärtused sümbolitega $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Vaatleme sündmusi $X = x_1$, $X = x_2, \ldots, X = x_n$. Nende sündmuste hulk moodustab täieliku üksteist välistavate sündmuste süsteemi. (Miks?)

Tähistame

$$P(X = x_i) = p_i ;$$

siis arvupaaride hulka (x_i, p_i) $(i=1,2,\ldots,n)$, kus $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ nimetatakse juhusliku suuruse jaotuseks. Sageli esitatakse jaotus tabelina.

Näide 4. Näites 1 vaadeldud juhusliku suuruse X jaotus on järgmine:

$X: x_i$	-1	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

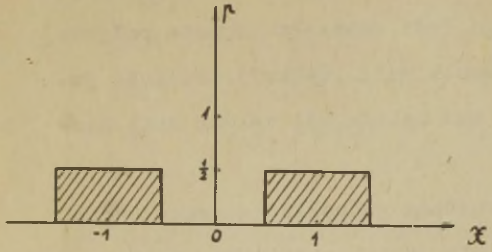
Näites 3 vaadeldud juhuslike suuruste Y ja Z jaotused on aga sellised:

$Y: y_i$	0	1	10	100	1000
p_i	0,8889	0,1	0,01	0,001	0,0001

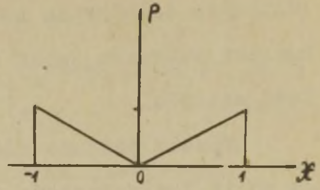
$Z: z_i$	0	1	10	100	1000
p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Mõningatel juhtudel saab juhusliku suuruse jaotuse esitada ka valemina. Üheks tüüpilisemaks näiteks sellest valdkonnast on binomiaaljaotus (vt. punkt 7.2)

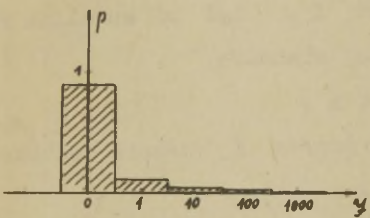
Juhusliku suuruse jaotust saab graafiliselt esitada kas tulpdiagrammina (vt. joonised 7 ja 8) või jaotuspolügoonina (vt. joonised 9 ja 10; samuti vt. jooniseid punktides 7.1 - 7.5).



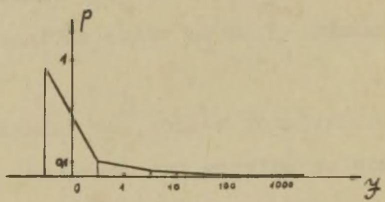
Joon. 7.



Joon. 9.



Joon. 8.



Joon. 10.

Sageli on otstarbekas ka konstanti (juhusest sõltumatut suurust) vaadelda juhusliku suuruse erijuhuna; konstandi c jaotus on triviaalne:

P(X = c) = 1, s. t. juhusliku suuruse X ainsa väärtuse c tõenäosus on 1.

3. Lõpmatu hulga väärtustega juhusliku suuruse jaotus.

Näites 2 vaadeldud juhuslikul suurusel on lõpmata palju väärtusi. Seega on kõigi (või vähemalt lõpmata paljude) väärtuste omandamise tõenäosus null. (Miks?) Selliste juhuslike suuruste jaoks ei saa tabeli või valemi abil jaotust esitada.

Lõpmata paljude väärtustega juhusliku suuruse jaotust on sobiv iseloomustada teiste karakteristikute, näiteks jaotusfunktsiooni abil.

4. Juhusliku suuruse jaotusfunktsioon.

Vaatleme juhuslikku suurust X. Olgu x suvaline reaalarv. Siis me võime defineerida sündmuse

$$X < x ,$$

mis seisneb selles, et juhuslik suurus X omandab väärtuse, mis on väiksem kui reaalarv x.

Leidnud sündmuse $X < x$ tõenäosuse iga reaalarvu x korral

$$P(X < x) , \quad (-\infty < x < \infty) ,$$

saame reaalse argumendi x funktsiooni, mida nimetatakse juhusliku suuruse X jaotusfunktsiooniks ja tähistatakse sümboliga

$$F_X(x) = P(X < x) \quad (-\infty < x < \infty) . \qquad (1)$$

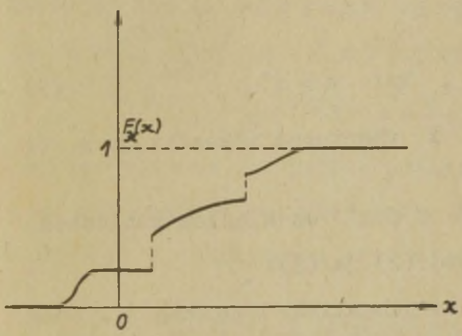
Juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon $F_X(x)$ (vt. joonis 11) iseloomustab vaadeldavat juhuslikku suurust.

Näide 5. Näites 3 vaadeldud juhuslike suuruste Y ja

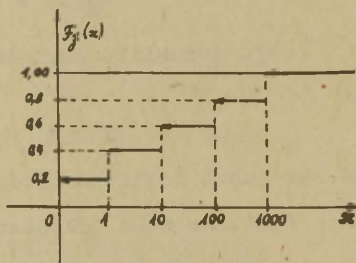
Z jaotusfunktsioonid on määratud järgnevalt:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0{,}0 , & x \leq 0 , \\ 0{,}2 , & 0 < x \leq 1 , \\ 0{,}4 , & 1 < x \leq 10 , \\ 0{,}6 , & 10 < x \leq 100 , \\ 0{,}8 , & 100 < x \leq 1000 , \\ 1{,}0 , & x > 1000 , \end{cases} \qquad F_Z(x) = \begin{cases} 0{,}0000, & x \leq 0, \\ 0{,}8889, & 0 < x \leq 1, \\ 0{,}9889, & 1 < x \leq 10, \\ 0{,}9989, & 10 < x \leq 100, \\ 0{,}9999, & 100 < x \leq 1000, \\ 1{,}0000, & x > 1000. \end{cases}$$

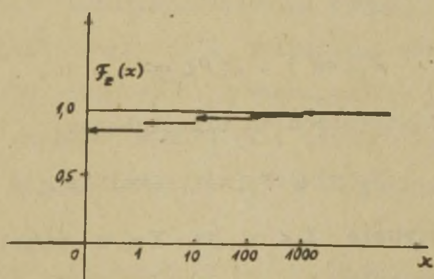
Jaotusfunktsiooni on hõlpus esitada ka graafiliselt (vt. jooniseid 12 ja 13).



Joon. 11.



Joon. 12.



Joon. 13.

5. Jaotusfunktsiooni omadused.

1° Jaotusfunktsiooni $F_X(x)$ väärtuste hulk on tõkestatud:

$$0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1 \quad (-\infty < x < \infty) .$$

(Miks?)

Kui juhuslikult suurusel X eksisteerib minimaalne väärtus x_0 , siis

$$F_X(x) = 0 \quad \text{iga} \quad x \leqslant x_0 \quad \text{korral;} \tag{2}$$

kui aga juhuslikult suurusel X eksisteerib maksimaalne väärtus x^*, siis

$$F_X(x) = 1 \text{ , kui } x > x^* . \tag{3}$$

Olgu juhusliku suuruse X väärtused tõkestatud: s. t. et

$$X > x_0 \text{ ja } X < x^* \text{ on kindlad sündmused.}$$

Ka sel juhul kehtivad võrdused (2) ja (3).

Vaatleme nüüd tõkestamata juhuslikku suurust X . Kuna X omandab üksnes reaalarvulisi väärtusi, $-\infty < X < \infty$, siis

$$F_X(-\infty) = P(X < -\infty) = 0 , \tag{4}$$

ja

$$F_X(\infty) = P(X < \infty) = 1 . \tag{5}$$

2° Jaotusfunktsioon on mittekahanev:

$$F_X(y) \leqslant F_X(x) \text{ , kui } x < y . \tag{6}$$

Tõepoolest, sündmuste $X < y$ ja $X < x$ vahel kehtib $x < y$ korral sisalduvusseos:

$$(X < x) \subset (X < y) ,$$

(miks?); teoreemi 2.3.1 järelduse 2 põhjal tuleneb aga sellest seosest võrratus:

$$P(X < y) \geqslant P(X < x) ,$$

mis on samaväärne võrratusega (6). (Miks?)

3° Jaotusfunktsioon on vasakult pidev:

$$\lim_{y \to x-} F_X(y) = F_X(x) . \qquad (7)$$

Tõepoolest,

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X < x - \delta) + P(x - \delta < X < x) . \qquad (8)$$

Sündmus $\lim\limits_{\delta \to 0} (x - \delta < X < x)$ on võimatu, sest $\lim\limits_{\delta \to 0}(x - \delta) = x$ ja vanemik $\lim\limits_{\delta \to 0} (x - \delta, x)$ ei sisalda ainsatki punkti. Siis

$$\lim_{\delta \to 0+} P(x - \delta < X < x) = 0 ,$$

ja kuna võrduse (8) parema poole esimene liidetav läheneb (δ lähenemisel nullile) jaotusfunktsiooni väärtusele $F_X(x - 0)$, järeldubki siit võrdus (7).

6. Pidevad ja diskreetsed juhuslikud suurused.

Kui juhuslikul suurusel X on üksnes n erinevat väärtust, siis on tema jaotusfunktsiooniks treppfunktsioon, kusjuures katkevuspunktideks on X võimalikud väärtused x_1, $x_2, \ldots, x_n$ (miks?); väljaspool katkevuspunkte püsib jaotusfunktsioon konstantsena (miks?) (vt. näiteks 7.2); samasuguse omadusega on ka joonistel 12 ja 13 kujutatud jaotusfunktsioonid.

Kui juhuslikul suurusel X on loenduv hulk erinevaid väärtusi, siis on tema jaotusfunktsiooniks lõpmatu hulga astmetega treppfunktsioon. (Mida võime sel korral öelda hüpete pikkuse kohta? Kuidas käitub jaotusfunktsioon väljaspool katkevuspunkte? Vt. näiteks 7.4).

Kui juhuslikul suurusel X on lõpmata palju erinevaid väärtusi ning iga väärtuse omandamise tõenäosus on 0, siis nimetatakse juhuslikku suurust X pidevaks. Pideva juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon on pidev funktsioon. (Vt. näiteks 7.6 ja 7.7).

7. Tõenäosuse tihedus.

Olgu X pidev juhuslik suurus. Siis võib tema jaotusfunktsioon $F_X(x)$ olla oma argumendi x järgi diferentseeruv (see ei tarvitse aga alati nii olla, sest iga pidev funktsioon ei ole diferentseeruv - miks?).

Kui $F_X(x)$ on diferentseeruv, siis nimetatakse tema tuletist

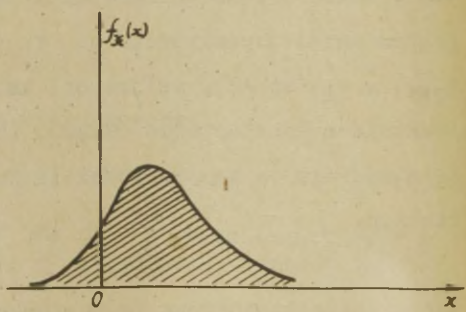
$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x) \tag{9}$$

juhusliku suuruse X tõenäosuse tiheduseks e. tihedusfunktsiooniks. (Vt. joonis 14.)

Leiame tõenäosuse tiheduse omadused:

1° $f_X(x) \geqslant 0$. (10)

Tõepoolest, kuna $F_X(x)$ on alati mittekahanev, siis on tema tuletis alati mittenegatiivne.



Joon. 14.

2^0 Iga $x_1 < x_2$ korral

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx; \qquad (11)$$

seos (11) järeldub seostest (1) ja (9) ning Newton-Leibnizi valemist.

$$3^0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \,. \qquad (12)$$

Seose (12) saame seosest (11), valides vaid $x_1 = -\infty$, $x_2 = \infty$ ning rakendades võrdusi (4) ja (5). (Vt. näiteks 7.6 ja 7.7.)

8. Juhuslik vektor.

Mõnikord võib samal elementaarsündmuste hulgal olla määratud rohkem kui üks juhuslik suurus, s. t. juhuslike suuruste hulk $X_1,\dots,X_n$, mis n.-ö. "sõltuvad samadest juhustest".

Kui me mingi elementaarsündmuse E korral vaatleme üheskoos juhuslike suuruste $X_1,\dots,X_n$ väärtusi, siis ütleme, et me vaatleme juhusliku vektori $(X_1,\dots,X_n)$ väärtusi elementaarsündmuse E korral.

Näide 6. Mõõdame mingil indiviidide hulgal (näiteks üliõpilastel) mitut näitajat (näiteks pikkus X_1, kaal X_2, vanus X_3 jne.). Mõõtmistulemused sõltuvad sellest, millise konkreetse indiviidi kõigi indiviidide hulgast me valime; iga üksik indiviid moodustab seega elementaarsündmuse; nii on juhuslikud suurused X_1, X_2 ja X_3 kõik määratud samal elementaarsündmuste hulgal.

Valime ühe indiviidi ja mõõdame selle pikkuse, kaalu ja vanuse; siis saame juhusliku vektori (X_1,X_2,X_3) väärtuse sellele indiviidile vastava elementaarsündmuse korral.

Juhuslikku vektorit iseloomustavad:

1° Vektori jaotus ehk tema komponentide ühine jaotus, mis on esitatav tabelina, kui $X_1,\ldots,X_n$ on lõpliku hulga väärtustega,

2° vektori jaotusfunktsioon ehk tema komponentide ühine jaotusfunktsioon

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 < x_1,\ldots,X_n < x_n) .$$

(Tuletada juhusliku vektori jaotusfunktsiooni omadused, mis on analoogilised juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni omadustega 1° - 3°),

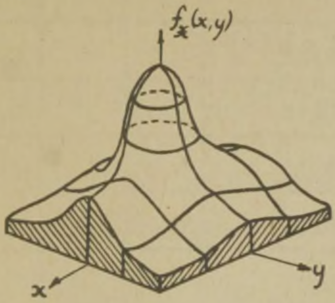
3° vektori tõenäosuse tihedus, mis eksisteerib parajasti siis, kui $X_1,\ldots,X_n$ on diferentseeruv iga oma argumendi järgi:

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1,\ldots,\partial x_n} .$$

Tarvilik, kuid mitte piisav tingimus tõenäosuse tiheduse eksisteerimiseks on, et vektori kõik komponendid oleksid pidevad juhuslikud suurused. (Miks pole see tingimus piisav?)

Tuletada juhusliku vektori tõenäosuse tiheduse omadused, mis on analoogilised juhusliku suuruse tõenäosuse tiheduse omadustega 1° - 3°.

Edaspidi vaatleme eeskätt kahedimensionaalseid juhuslikke vektoreid. (Vt. joonis 15, kus on kujutatud kahedimensionaalse juhusliku suuruse tõenäosuse tihedus.)



Joon. 15.

Kahedimensionaalse vektori ühine jaotus juhul, kui X_1 võib omandada n erinevat väärtust $x_{11},\dots,x_{1n}$, X_2 - m erinevat väärtust $x_{21},\dots,x_{2m}$, on esitatav $n \times m$ ruutu sisaldava tabelina, kus

$$p_{ij} = P(X_1 = x_{1i},\ X_2 = x_{2j})$$

$(i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m)$.

Tabeli äärmine parempoolne veerg esitab X_1 jaotust ning alumine rida - X_2 jaotust.

$$p_{i.} = P(X_1 = x_{1i})\ ;\ p_{.j} = P(X_2 = x_{2j})\ .$$

$X_1 \backslash X_2$	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}	$p_{i.}$
x_{11}	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	$p_{1.}$
x_{12}	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	$p_{2.}$
...	...	...	...	...	...
x_{1n}	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	$p_{n.}$
$p_{.j}$	$p_{.1}$	$p_{.2}$	...	$p_{.m}$	1

Näide 7. Siin on X_1 teatava aine eksami ettevalmistamiseks jäetud päevade arv, X_2 - eksamil saadav hinne.

X_2 \ X_1	1	2	3	4	5	6	7	
2	0,03	0,03	0,02	0,01	0	0,01	0	0,10
3	0,02	0,06	0,12	0,12	0,02	0,01	0	0,35
4	0	0,01	0,13	0,13	0,07	0,03	0,03	0,40
5	0	0	0,03	0,04	0,01	0,05	0,02	0,15
	0,05	0,10	0,30	0,30	0,10	0,10	0,05	

Kahedimensionaalse juhusliku vektori jaotusfunktsiooni kui kahe reaalse argumendi funktsiooni on võimalik terviku-na illustreerida üksnes ruumilise "graafikuna". (Kirjeldada näites esitatud juhusliku vektori (X_1,X_2) graafikut, teha vastav ruumiline joonis!)

9. Sõltumatud juhuslikud suurused.

Vaatleme kahedimensionaalset juhuslikku vektorit (X,Y). Nimetame juhuslikke suurusi X ja Y sõltumatuteks, kui iga reaalarvude paari (x,y) korral on sündmused

$$X < x \quad \text{ja} \quad Y < y \tag{13}$$

sõltumatud.

Vaatleme juhuslike suuruste X ja Y ühist jaotusfunktsiooni

$$F_{XY}(x,y) = P(X < x,\ Y < y) .$$

Arvestades sündmuste (13) sõltumatust, saame seose (3.4) põhjal võrduse:

$$P(X<x,\ \ Y<y) = P(X<x)P(Y<y) = F_X(x)F_Y(y)\ ,$$

millest järeldub, et

$$F_{XY}(xy) = F_X(x)F_Y(y)\ . \qquad (14)$$

Vaatleme nüüd n-dimensionaalset juhuslikku vektorit $(X_1,\dots,X_n)$.

Me ütleme, et juhuslikud suurused X_i $(i=1,2,\dots,n)$ on paarikaupa sõltumatud, kui iga $i\neq j$ korral on X_i ja X_j sõltumatud.

Juhuslikud suurused X_i $(i=1,\dots,n)$ on täielikult sõltumatud, kui iga naturaalarvude hulga $j_1,j_2,\dots,j_k$ ja reaalarvude hulga $x_{j_1},\dots,x_{j_k}$ $(k\leqslant n\ ;\ j_i\leqslant n\ ; i=1,2,\dots,k)$ $j_i\neq j_l$, kui $i\neq l$ korral moodustavad sündmused $X_{j_i}<x_{j_i}$ $(i=1,2,\dots,k)$ täielikult sõltumatute sündmuste süsteemi.

10. Ülesandeid.

1. Eeldame, et sõltumatutel juhuslikel suurustel X ja Y eksisteerivad tõenäosuse tihedused $f_X(x)$ ja $f_Y(x)$. Tõestada seos:

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y)f_Y(y)dy\ .$$

(Vt. ka III, 3.11 -3.13).

——— + ———

1. Urnis on 2 valget ja 3 musta kuuli. Urnist võetakse ükshaaval kuule. Juhuslik suurus X tähistab 2 valge kuuli vahel võetud mustade kuulide arvu. Leida X jaotus, kui kuule ei asetata tagasi. Missugune on X-i tõenäoseim väärtus?

2. Urnis on 2 valget ja k musta kuuli. Urnist võetakse ükshaaval kuule. Juhuslik suurus X tähistab 2 valge kuuli vahepeal võetud mustade kuulide arvu. Leida X jaotus, kui kuule ei asetata tagasi.

3. Urnis on m valget ja k musta kuuli. Urnist võetakse ükshaaval kuule. Juhuslik suurus X tähistab 2 esimesena väljatulnud valge kuuli vahepeal võetud mustade kuulide arvu. Leida X jaotus, kui kuule ei asetata tagasi.

4. Urnis on 2 valget ja 3 musta kuuli. Urnist võetakse ükshaaval kuule. Juhuslik suurus X tähistab 2 esimesena väljatulnud valge kuuli vahel võetud mustade kuulide arvu. Leida X jaotus, kui iga kuul asetatakse kohe tagasi ja kuulid segatakse. Missugune on X-i tõenäoseim väärtus?

5. Urnis on m valget ja k musta kuuli. Urnist võetakse ükshaaval kuule. Juhuslik suurus X tähistab 2 esimesena väljatulnud valge kuuli vahel võetud mustade kuulide arvu. Leida X jaotus, kui iga kuul asetatakse kohe tagasi ja kuulid segatakse. Missugune on selle juhusliku suuruse tõenäoseim väärtus?

6. Visatakse 3 täringut. Leida langenud silmade arvu jaotus.

7. Kaks korvpallurit A ja B viskavad korvi; mängija A tabamise tõenäosus on 0,6; mängijal B - 0,4. Pall vahetub esimesel möödaviskel. Leida mängija B visete arvu jaotus, kui alustab A .

8. Üliõpilasel tuli eksamiks õppida 50 küsimust, kuid ta jõudis õppida vaid 40. Eksamil esitati talle 3 küsimust.

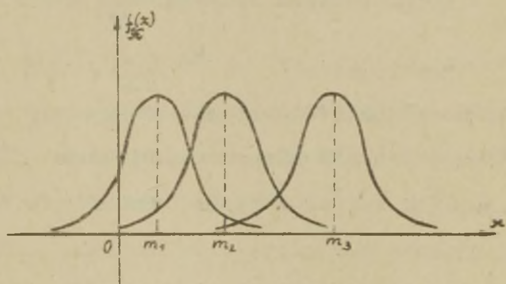
Kui üliõpilane vastab õigesti kolmele küsimusele, saab ta hinde 5; kui üliõpilane vastab õigesti kahele küsimusele, saab ta hinde 4; kui üliõpilane vastab õigesti ühele küsimusele, saab ta hinde 3; kui üliõpilane ei vasta ühelegi küsimusele õigesti, saab ta hinde 2.

Leida üliõpilase hinde jaotus.

§ 6. Juhusliku suuruse arvulised karakteristikud.

1. Keskväärtus.

Mõnikord on otstarbekas iseloomustada juhuslikku suurust ühe arvuga, mis teatud mõttes kõige paremini selle juhusliku suuruse väärtusi esindab (vt. joonis 16). Selleks arvuks valitakse tavaliselt juhusliku suuruse <u>keskväärtus</u> (mida mõningate probleemide korral ka ooteväärtuseks e. matemaatiliseks ootuseks nimetatakse). Juhusliku suuruse X keskväärtuse tähistame sümboliga EX .



Joon. 16. Erineva keskväärtusega juhuslike suuruste tõenäosuse tiheduse graafikud.

Diskreetse juhusliku suuruse X keskväärtuseks EX nimetatakse seosega

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{1}$$

määratud suurust, kui X omab lõpliku hulga erinevaid väärtusi, ja suurust

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i , \tag{2}$$

kui juhusliku suuruse X väärtuste hulk on loenduv ning rida (2) koondub absoluutselt; kui rida (2) ei koondu absoluutselt, siis ütleme, et juhuslikul suurusel X ei ole keskväärtust. (Vt. näiteid 1–4.)

Pideva juhusliku suuruse X keskväärtuseks nimetatakse valemiga (3) määratud suurust

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx , \tag{3}$$

kui tõenäosuse tihedus $f_X(x)$ eksisteerib ja integraal (3) koondub absoluutselt; kui integraal (3) ei koondu absoluutselt, siis me ütleme, et juhuslikul suurusel X ei eksisteeri keskväärtust.

Kõige üldisem keskväärtuse avaldis

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X (x) \tag{4}$$

defineeritakse Stieltjesi integraali abil (vt. [7], lk. 449). Valem (4) annab ainuvõimaliku kuju EX arvutamiseks nende juhuslike suuruste jaoks, mis ei ole diskreetsed ega oma ka tõenäosuse tihedust; erijuhtudena tulenevad siit ka valemid (1) - (3) (tuletada need!).

2. <u>Keskväärtuse omadused</u>.

1° $EC = C$, kui C on konstant (s. o. juhusest sõltumatu suurus).

2° $E(X + Y) = EX + EY$.

Vaatleme lihtsaimat juhtu, kus X ja Y on lõpliku hulga väärtustega juhuslikud suurused. Olgu nende jaotused:

$$P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1,2,\dots,n),$$

$$P(Y = y_j) = q_j \quad (j = 1,2,\dots,m)$$

ning juhusliku vektori (X, Y) ühine jaotus:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m).$$

Ilmselt

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}; \quad q_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Siis

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j\, q_j =$$

$$= EX + EY.$$

Tõestada seos 2°: a) juhul, kui X ja Y on diskreetsed loenduva hulga väärtustega juhuslikud suurused (kas sellest tõestusest järelduks ka vaadeldav erijuht? Miks?) b) juhul, kui X ja Y omavad tõenäosuse tihedust.

3° $E(CX) = C \cdot EX$.

4° $EX \geqslant 0$, kui $X \geqslant 0$.

5° $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$, kui X ja Y on sõltumatud juhuslikud suurused.

10

Tõestada keskväärtuse omadused 1° ja $3^\circ - 5^\circ$!

Näide 1. Arvutame näites 5.1 vaadeldud juhusliku suuruse X keskväärtuse:

$$EX = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0 .$$

Olgu märgitud, et niisuguseid mänge, mille korral kummagi mängija võidetud summa keskväärtus on 0, nimetatakse õiglasteks mängudeks. Seega on vaadeldav mäng õiglane.

Näide 2. Arvutame nüüd loteriivõidu keskväärtuse (vt. näide 53) kummagi juhu jaoks, s. o. juhuslike suuruste Y ja Z keskväärtused.

$$EY = 1 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}01 + 100 \cdot 0{,}001 + 1000 \cdot 0{,}0001 = 0{,}4;$$

$$EZ = 1 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 0{,}2 + 1000 \cdot 0{,}2 = 222{,}2 .$$

Keskväärtuste võrdlemine näitab, kui palju kasulikum on osavõtt teisest loteriist.

Näide 3. (Peterburi mäng.) Kaks isikut A ja B mängivad järgmist mängu: A viskab münti. Kui I viskel langeb peale vapipool, maksab ta B-le 1 kopika, kui II viskel langeb esmakordselt peale vapipool, maksab ta B-le 2 kopikat, ..., kui k-ndal viskel langeb esmakordselt peale vapipool, maksab A mängijale B 2^{k-1} kopikat.

Leida mängija B võidusumma X keskväärtus.

Kirjutame X jaotuse:

$$P(X = 2^{k-1}) = \frac{1}{2^k} \qquad (5)$$

(põhjendada!).

Kasutades valemit (2) saame:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \cdot P(X = 2^{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \infty .$$

Järelikult mängija B võidusumma keskväärtus on lõpmata suur!

Näide 4. Vaatleme nüüd mängu, kus niihästi A kui ka B viskavad kordamööda münti, kusjuures kumbki maksab teisele summa vastavalt sellele, mitmendal viskel see esmakordselt saab vapipoole (mäng kestab seni, kuni kumbki on vapipoole saavutanud).

Mängija A võidu keskväärtuse arvutamisel saaksime rea:

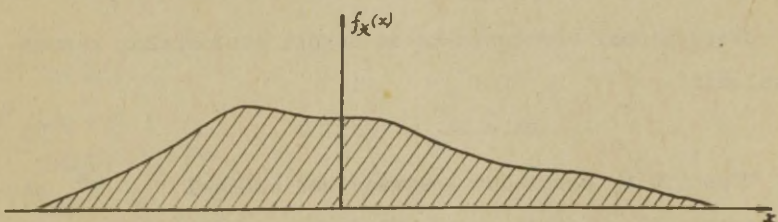
$$EX = 1.\frac{1}{2} - 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} - 2.\frac{1}{4} + \dots + 2^{k-1}.\frac{1}{2^k} - 2^{k-1}.\frac{1}{2^k} + \dots ,$$

s. o. rea, mis ei koondu absoluutselt; järelikult keskväärtust ei eksisteeri.

Näiteid pidevate juhuslike suuruste keskväärtuste arvutamisest vt. [7.6 - 7.9].

Juhusliku suuruse keskväärtusele võib anda järgmise illustratsiooni.

Vaatleme reaaltelge kui varba, mille tihedus punktis x (lugedes mingist fikseeritud nullpunktist sellel varval) võrdub juhusliku suuruse X tõenäosuse tihedusega $f_X(x)$ selles punktis x. Siis on selle varva raskuskeskmeks juhusliku suuruse X keskväärtus EX (kui see eksisteerib).



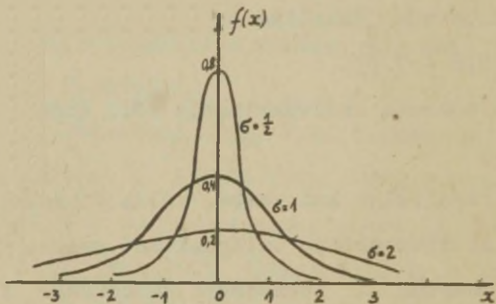
Joon. 17.

Teine interpretatsioon oleks järgmine: kujutleme homogeenset tasandilist plaati (vt. joonis 17), mida piirab x-telg ja kõver $f_X(x)$. Siis paikneb selle plaadi raskuskese sirgel $x = EX$.

3. Dispersioon.

Teiseks oluliseks juhuslikku suurust iseloomustavaks tunnuseks on tema hajuvus keskväärtuse suhtes. Hajuvust iseloomustavad mitmed karakteristikud, mille hulgas olulisemaks on dispersioon (vt. joonis 18).

$$DX = E(X - EX)^2 . \qquad (6)$$



Joon. 18. Erineva dispersiooniga normaaljaotuse tõenäosuse tiheduse graafikud.

Dispersiooni arvutamiseks on sageli otstarbekam kasutada valemit

$$DX = EX^2 - (EX)^2 . \qquad (7)$$

Tõepoolest, kasutades keskväärtuse omadusi $1^o - 3^o$, saame seosest (6) tuletada seose (7) (teha seda!).

Dispersiooni arvutamiseks diskreetse juhusliku suuruse puhul võime kasutada valemit:

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 ; \quad (8)$$

või vastavalt:

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^2 p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i)^2 . \quad (9)$$

Kui aga juhuslikul suurusel eksisteerib tõenäosuse tihedus, siis saab dispersiooni arvutamiseks kasutada valemit:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx\right]^2 . \quad (10)$$

Ruutjuurt dispersioonist $\sqrt{DX}$ nimetatakse <u>standardhälbeks</u>. Samuti kui dispersioon, on ka standardhälve juhusliku suuruse hajuvuse karakteristikuks.

Tuleb märkida, et igal juhuslikul suurusel ei tarvitse dispersiooni üldse eksisteeridagi. Ilmselt on dispersiooni eksisteerimiseks tarvilik ja piisav, et eksisteerivad suurused EX ja EX^2 (kas on tarvis nõuda mõlema suuruse - EX ja EX^2 eksisteerimist? Missuguste juhuslike suuruste korral dispersioon kindlasti eksisteerib?).

Dispersiooni tähtsamatest omadustest märgiksime järgnevaid:

1° $DX \geqslant 0$;

2° $Dc = 0$;

3° $D(cX) = c^2 DX$;

4° $D(a + X) = DX$;

5° Kui X ja Y on sõltumatud, siis $D(X + Y) = DX + DY$.

Kõik ülalmärgitud omadused on lihtsalt tõestatavad üksnes seoste (6) ja (7) ning keskväärtuse omaduste 1° - 5° abil (tõestada!).

Näide 5. Leiame näidetes 5.1 ja 5.3 vaadeldud juhuslike suuruste dispersioonid.

Juhusliku suuruse X dispersiooni on lihtne leida otse lähtevalemist:

$$DX = E(X - EX)^2 = \frac{1}{2}(1 - 0)^2 + \frac{1}{2}(-1-0)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ ;$$

Y ja Z dispersiooni leidmiseks kasutame valemit (7):

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = 0,1.1^2 + 0,01.10^2 + 0,001.100^2 + \\ + 0,0001 \cdot 1000^2 - 0,4^2 = 111,1 - 0,16 = 110,94.$$

$$DZ = 0,2\ (1 + 10^2 + 100^2 + 1000^2) - 222,2^2 = \\ = 202020,2 - 49372,84 = 152647,36 \ .$$

(Millega võrdub näidetes 3 ja 4 vaadeldud juhuslike suuruste dispersioon?)

Näiteid dispersiooni arvutamise kohta vt. ka § 7!

4. Momendid.

Keskväärtus ja dispersioon kuuluvad juhuslike suuruste arvuliste karakteristikute klassi, mida üldkujul saab esitada järgnevalt:

$$m_r = EX^r \ , \qquad (11)$$

$$\bar{m}_r = E(X - EX)^r, \ r \text{ on naturaalarv.} \qquad (12)$$

Valemiga (11) määratud suurust m_r nimetatakse juhusliku suuruse X r-järku momendiks; valemiga (12) defineeritud suurust $\bar{m}_r$ - juhusliku suuruse X r-järku tsentraalseks momendiks.

Kui juhuslikul suurusel X on lõpmatu hulk erinevaid väärtusi, siis võib juhtuda, et momendid (11) ja (12) ei eksisteerigi mõnede r väärtuste korral või ka iga r korral, $r = 1,2,\dots$.

Osutub, et kui eksisteerib mingi r-järku moment, siis eksisteerivad ka kõik k-järku momendid, $k = 1,2,\dots,r$. (Kas siit järeldub ka vastupidi, et kui mingi k-järku moment ei eksisteeri, ei eksisteeri ka ükski r-järku moment, $r = k, k+1, \dots$?)

Juhusliku suuruse momente ja tsentraalseid momente seob järgmine lihtne seos:

$$\bar{m}_r = \sum_{i=o}^{r} (-1)^i C_r^i (EX)^i m_{r-i} . \qquad (13)$$

(Põhjendada valemit (13) ja lihtsustada seda, arvestades, et $m_o = 1$ (miks?) ja $m_1 = EX$!).

Valemist (13) järeldub, et alati, kui eksisteerib r-järku moment, eksisteerib ka sama järku tsentraalne moment ja vastupidi. (Miks? Kas saaks ka momente tsentraalsete momentide kaudu esitada? Kirjutada vastav seos!)

Momentide ja tsentraalsete momentide arvutamiseks saab kasutada järgmisi valemeid:

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r p_i ; \qquad \bar{m}_r = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^r p_i ;$$

$$m_r = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r p_i ; \qquad \bar{m}_r = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^r p_i ; \qquad (14)$$

$$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x) dx ; \qquad \bar{m}_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^r f_X(x)\, dx .$$

Peale keskväärtuse ja dispersiooni on juhuslikule suurusele X oluliseks karakteristikuks veel kolmandat järku tsentraalne moment, mille kaudu defineeritakse <u>asümmeetria kordaja</u>

$$\frac{\bar{m}_3}{(DX)^{3/2}} .$$

Juhuslikku suurust X nimetatakse <u>sümmeetriliseks punkti c suhtes</u>, kui iga x puhul $(-\infty < x < \infty)$ kehtib seos

$$P(X = x + c) = P(X = x - c) ,$$

kui X on diskreetne juhuslik suurus, või

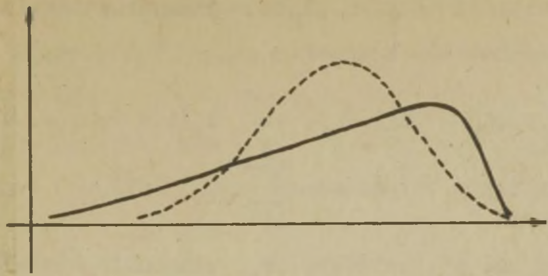
$$f_X(x + c) = f_X(x - c) ,$$

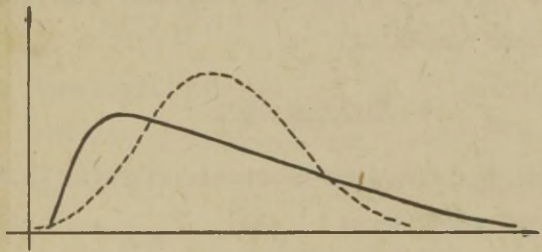
kui X on pidev juhuslik suurus.

Kui punkti c suhtes sümmeetrilisel juhuslikul suurusel X eksisteerib keskväärtus EX, siis $EX = c$. (Miks?)

Kui sümmeetrilisel juhuslikul suurusel eksisteerib kolmas tsentraalne moment $\bar{m}_3$, siis võrdub see nulliga (tõestada!). Kui nullpunkti suhtes sümmeetrilisel juhuslikul suurusel eksisteerib kolmas moment m_3, võrdub see nulliga (kirjutada välja tingimused, et juhuslik suurus on nullpunkti suhtes sümmeetriline, ja tõestada viimane lause!).

Näeme, et kolmandat järku tsentraalse momendi väärtus iseloomustab teatud määral juhusliku suuruse ebasümmeetrilisust (vt. joonis 19). (Mis puhul on asümmeetria kordaja positiivne, mis puhul negatiivne?)





Joon. 19.

5. Segamomendid.

Juhusliku vektori $(X_1, \ldots, X_n)$ r-järku segamomendiks nimetatakse suurust

$$E(X_1^{r_1} X_2^{r_2} \ldots X_n^{r_n}) \text{ , kus } r_i \ (i = 1,2,\ldots,n) \text{ ja}$$

r on mittenegatiivsed täisarvud, $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$.

Ilmselt on r-järku segamomente enam kui üks (mitu?), erijuhtudena kuuluvad r-järku segamomentide hulka ka iga komponendi r-järku momendid. (Missugused on sel juhul astendajate r_i väärtused?)

Juhusliku vektori $(X_1,\ldots,X_n)$ r-järku tsentraalseks segamomendiks nimetatakse suurusi

$E\left[(X_1 - EX_1)^{r_1}\ldots(X_n - EX_n)^{r_n}\right]$, kus $r_i (i = 1,2,\ldots,n)$ ja r on mittenegatiivsed täisarvud, $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$.

On võimalik ka, et teatavate r_i väärtuste korral segamoment ei eksisteeri. (Kas juhul, kui juhusliku suuruse X igal komponendil X_i on lõplik hulk väärtusi, eksisteerivad tema kõikvõimalikud momendid?)

6. Kovariatsioon.

Olgu X ja Y juhuslikud suurused. Vektori (X,Y) teist järku tsentraalset segamomenti

$$E\,(X - EX)(Y - EY) \qquad (15)$$

nimetatakse juhuslike suuruste X ja Y kovariatsiooniks ja tähistatakse sümboliga $\mathrm{cov}(X,Y)$.

Kovariatsiooni arvutamiseks on sageli hõlpsam kasutada valemit (16):

$$\mathrm{cov}\,(X,Y) = E(XY) - EXEY\,. \qquad (16)$$

(Tõestada!)

Sõltumatute juhuslike suuruste X ja Y kovariatsioon võrdub nulliga. (Miks?) Kovariatsiooni märk iseloomustab mõnevõrra juhuslike suuruste X ja Y ühise muutumise iseloomu: kui X suurenemisel reeglina ka Y suureneb, on $\mathrm{cov}\,(X,Y) > 0$, kui aga X suurenemisel üldiselt Y väheneb, siis $\mathrm{cov}\,(X,Y) < 0$.

Kovariatsiooni arvutamiseks peame teadma juhuslike suuruste X ja Y ühist jaotust. Erijuhul, kui X ja Y on mõlemad diskreetsed, kusjuures juhusliku suuruse X jaotus on: $P(X = x_i) = p_i$, Y jaotus: $P(Y = y_j) = q_j$ ja vektori (X,Y) jaotus: $P(X = x_i\, , Y = y_j) = p_{ij}$, saame kovariatsiooni arvutada järgnevate valemite abil:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j q_j ;$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j p_{ij} - \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j .$$

Kui juhuslikel suurustel X ja Y eksisteerivad tõenäosuse tihedused $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ ning ühine tõenäosuse tihedus $f_{XY}(x,y)$, saame kovariatsiooni arvutamisel kasutada valemit:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)\,dx\,dy - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy\right).$$

(Kas iga juhuslike suuruste paari (X,Y) korral eksisteerib cov(X,Y) ?)

7. Korrelatsioonikordaja.

Sageli kasutatakse kahe juhusliku suuruse X ja Y vahelise sõltuvuse iseloomustajana (lineaarse) korrelatsiooni kordajat r_{XY} , mis arvutatakse järgnevalt:

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\,\sqrt{DY}} = \frac{E((X - EX)(Y - EY))}{\sqrt{E(X - EX)^2}\,\sqrt{E(Y-EY)^2}} . \qquad (17)$$

Korrelatsioonikordajal on järgmised omadused:

1° Kui X ja Y on sõltumatud, siis $r_{XY} = 0$;

2° $r_{X+a,\ Y+b} = r_{XY}$;

3° $r_{aX,\, bY} = \begin{cases} r_{XY}, & \text{kui } ab > 0, \\ -r_{XY}, & \text{kui } ab < 0; \end{cases}$

4° Kui $Y = aX + b$, siis $r_{XY} = \begin{cases} 1, & \text{kui } a > 0, \\ -1, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$

Tõestada need omadused, kasutades valemeid (16) ja (17) ning keskväärtuse ja dispersiooni omadusi.

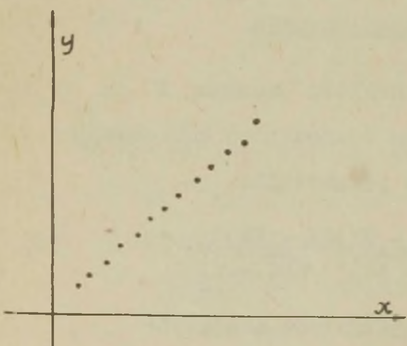
Cauchy-Bunjakovski võrratuse (vt. III, 4, 11)

$$(EXY)^2 \leqslant EX^2EY^2$$

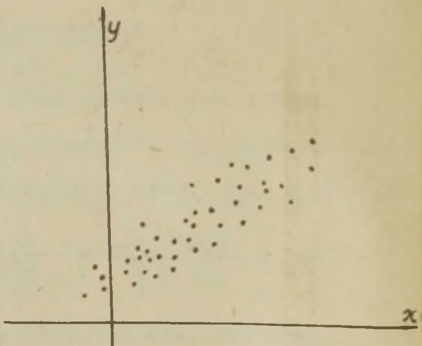
abil saame näidata korrelatsioonikordaja veel ühe olulise omaduse:

5° $-1 \leqslant r_{XY} \leqslant 1$ (tõestada!).

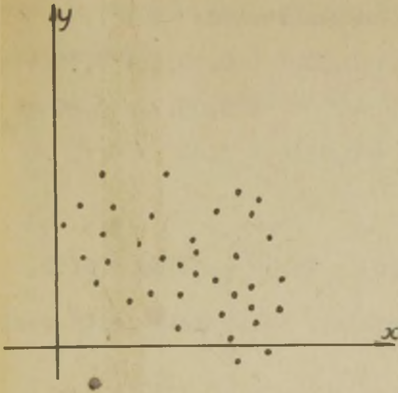
Korrelatsioonikordaja saavutab absoluutselt maksimaalse väärtuse, kui X ja Y on omavahel lineaarses sõltuvuses. Selletõttu nimetataksegi vaadeldavat korrelatsioonikordajat lineaarseks. Võib öelda, et korrelatsioonikordaja absoluutväärtus iseloomustab teatud mõttes X ja Y vahelise lineaarse seose tugevust (vt. joonised 20, 21, 22, 23).



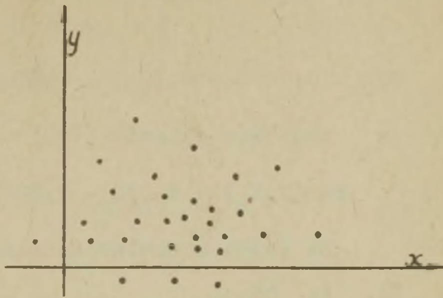
Joon. 20. Juhuslikud suurused X ja Y on lineaarselt sõltuvad.



Joon. 21. Juhuslike suuruste X ja Y vahel on positiivne korrelatsioon.



Joon. 22. Juhuslike suuruste X ja Y vahel on nõrk negatiivne korrelatsioon.



Joon. 23. Juhuslikud suurused X ja Y on praktiliselt sõltumatud.

<u>Näide 6</u>. Arvutame tabelina esitatud kahedimensionaalse juhusliku suuruse X_1, X_2 komponentide kovariatsiooni.

Suuruse $E(X_1X_2)$ arvutamise hõlbustamiseks kirjutame tabelisse kõigepealt $x_{2j}p_{ij}$; seejärel summeerime leitud korrutised veergude kaupa: korrutame vastavate X_{1i} väärtustega ning summeerime teiskordselt.

X_2 \ X_1	1	2	3	4	5	6	7
2	0,06	0,06	0,04	0,02	0	0,02	0
3	0,06	0,18	0,36	0,36	0,06	0,03	0
4	0	0,04	0,52	0,52	0,28	0,12	0,12
5	0	0	0,15	0,20	0,05	0,25	0,10
$\sum_{j=1}^{m} x_{2j}p_{ij}$	0,12	0,28	1,07	1,10	0,39	0,42	0,22
$x_{1i}\sum_{j=1}^{m} x_{2j}p_{ij}$	0,12	0,56	3,21	4,40	1,95	2,52	1,54

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i} \cdot \sum_{j=1}^{m} x_{2j}p_{ij} = 14,30 .$$

Seejärel leiame vajalikud keskväärtused:

$$EX_1 = 0,05.1 + 0,10.2 + 0,30.3 + 0,30.4 + 0,10.5 + 0,10.6 + 0,05.7 = 3,80 ,$$

$$EX_2 = 0,10.2 + 0,35.3 + 0,40.4 + 0,15.5 = 3,60$$

ja rakendame valemit (17):

$$\mathrm{cov}(X_1X_2) = 14,30 - 3,80.3,60 = 14,30 - 13,68 = 0,62.$$

Et leida korrelatsioonikordajat, tuleb meil leida veel DX_1 ja DX_2.

$$EX_1^2 = 0,05 + 0,10.4 + 0,30.9 + 0,30.16 + 0,10.25 + 0,10.36 + 0,05.49 = 16,50 ;$$

$$EX_2^2 = 0,10.4 + 0,35.9 + 0,40.16 + 0,15.25 = 13,70 ;$$

$$DX_1 = 16,50 - 3,80^2 = 16,50 - 15,44 = 1,06 ;\sqrt{DX_1} = 1,03$$

$$DX_2 = 13,70 - 3,60^2 = 13,70 - 12,96 = 0,74 ;\sqrt{DX_2} = 0,86$$

$$r_{XY} = \frac{0,62}{1,03\cdot 0,86} = 0,698 .$$

8. Kvantiilid; mediaan.

Vaatleme pidevat juhuslikku suurust X, mille jaotusfunktsioon $F_X(x)$ on rangelt monotoonne argumendi x selliste väärtuste vahemikus, kus $0 < F_X(x) < 1$. Siis leidub võrrandil

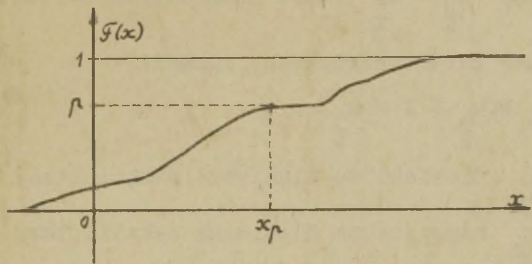
$$F_X(x) = p$$

iga $p(0 < p < 1)$ korral ühene lahend x_p. Seda lahendit x_p nimetatakse juhusliku suuruse X p-kvantiiliks (vt. joonis 24).

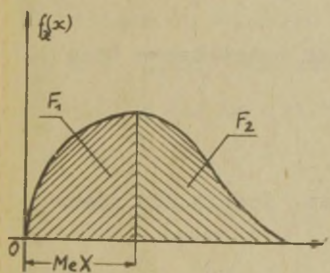
1. Kui $p = \frac{1}{2}$, siis nimetatakse punkti $x_p = x_{\frac{1}{2}}$ medi-

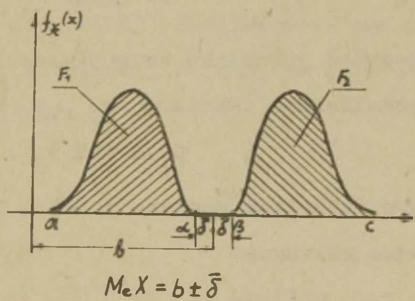
aaniks. Mediaan (vt. joonis 25) on selline reaalarv Me, mille korral

$$P(X < Me) = P(X \geqslant Me) = \frac{1}{2}.$$



Joon. 24.





Joon. 25. Joon. 26.

Joonisel 26 kujutatud juhul ei ole mediaan üheselt määratud, vaid mediaaniks on iga punkt lõigul $[b-\delta, b+\delta]$, sest $F_1 = \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx = \int_{\beta}^{\infty} f_X(x)dx = F_2 = \frac{1}{2}$. Kokkuleppeliselt loetakse sel juhul mediaaniks tavaliselt mediaanlõigu keskpunkt b. Sümmeetrilise jaotuse korral Me = EX (kui vaid mõlemad suurused eksisteerivad - miks?).

2. Suurust $x_{\frac{1}{4}}$ nimetatakse alumiseks kvartiiliks, suurust $x_{\frac{3}{4}}$ ülemiseks kvartiiliks:

$$P(X < x_{\frac{1}{4}}) = \frac{1}{4} ; \quad P(X < x_{\frac{3}{4}}) = \frac{3}{4} .$$

Kvartiilide $x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}}$ vahet kasutatakse ka juhusliku suuruse hajuvuse karakteristikuna; ilmselt

$$P(x_{\frac{1}{2}} \leq X < x_{\frac{3}{4}}) = \frac{1}{2} .$$

Punkti $x_{\frac{1}{6}}$ nimetatakse alumiseks sekstiiliks,

punkti $x_{\frac{5}{6}}$ nimetatakse ülemiseks sekstiiliks.

Ka sekstiile kasutatakse hajuvuse karakteristikutena (vt.7.7).

9. Mood.

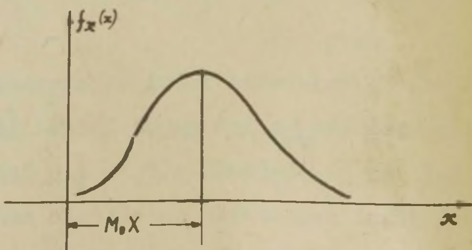
Diskreetse juhusliku suuruse moodiks nimetatakse tema kõige tõenäolisemat väärtust x_i, s. t.

$$p_i = \max_j p_j .$$

Pideva juhusliku suuruse moodiks (vt. joonis 27) nimetatakse tema niisugust väärtust x, millele vastab tõenäosuse tiheduse maksimaalne väärtus, s. t. sellist väärtust Mo, et

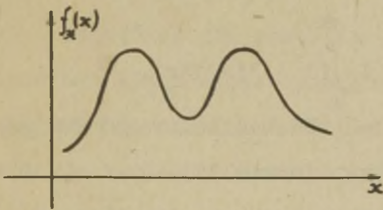
$$f_X(Mo) = \max_x f_X(x) .$$

Juhuslikul suurusel võib esineda

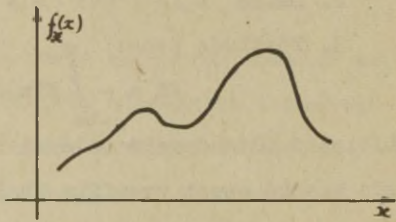


Joon. 27.

ka enam kui üks mood. Ühe moodiga jaotust nimetatakse unimodaalseks jaotuseks, kahe moodiga jaotust bimodaalseks (vt. joonised 28 ja 29) ja mitme moodiga – multimodaalseks jaotuseks.

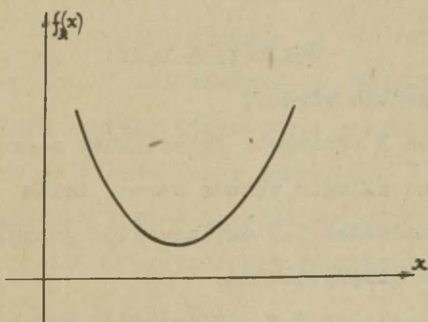


Joon. 28. Bimodaalne jaotus.



Joon. 29. Kahetipuline jaotus, mis ei ole bimodaalne.

Kui juhusliku suuruse väärtuste hulk on tõkestatud, moodideks on vahemiku otspunktid, vahemiku sees aga leidub punkt, kus $f_X(x)$ saavutab miinimumi, ütleme, et meil on antimodaalne jaotus (vt. joonis 30).



Joon. 30. Antimodaalne jaotus.

10. Ülesandeid.

1. Tõestada, et

$$\min_a E(X-a)^2 = DX .$$

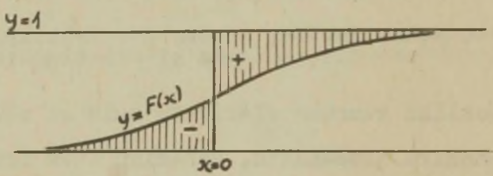
Millise a korral realiseerub miinimum?

2. Leida $D(X)$, kui $a \neq E(X)$, ja $E(X-a)^2 = b$.

3. Tõestada seos:

$$EX = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{\infty}(1 - F(x))dx .$$

Milliseid täiendavaid eeldusi tuleb tõestamisel teha? Tõlgendada saadud seost graafiku abil (vt. joonis 31).



Joon. 31.

4. Olgu X ja Y sõltumatud juhuslikud suurused. Tõestada võrratus:

$$D(X)D(Y) \leqslant D(XY) .$$

Millisel juhul kehtib võrdus?

5. Visatakse 3 täringut. Juhuslikuks suuruseks X on täringutel saadud silmade arvude summa. Leida EX ja DX !

6. Leida ülesandes 5.7 defineeritud juhuslike suuruste keskväärtused ja dispersioonid.

7. Leida ülesandes 5.4 defineeritud juhusliku suuruse keskväärtus ja dispersioon.

8. Leida ülesandes 5.8 defineeritud juhuslike suuruste X

(õigesti vastatud piletite arv) ja Y (saadud hinne) jaotus. Leida X ja Y kovariatsioon ja korrelatsioonikordaja. (Leida ökonoomseim viis vajalike suuruste arvutamiseks!)

§ 7. Klassikalised jaotused.

Kõikvõimalike juhuslike suuruste hulgas on mõnedel eriline osa tõenäosusteooria praktiliste ülesannete lahendamisel: ühelt poolt sobivad nad mitmete looduses esinevate protsesside kirjeldamiseks kas täpselt või ligilähedaselt, teiselt poolt aga on nende jaotused suhteliselt lihtsalt esitatavad ja uuritavad. Nende juhuslike suuruste jaotusi nimetatakse klassikaliseks (sest neid tuntakse ja kasutatakse juba pika aja jooksul).

1. Bernoulli jaotus (ka indikaatorfunktsioon).

Olgu A mingi sündmus, mille tõenäosus $P(A) = p$. Defineerime juhusliku suuruse X järgnevalt:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{kui sündmus } A \text{ ei toimu}, \\ 1, & \text{kui sündmus } A \text{ toimub}. \end{cases} \qquad (1)$$

Sellist juhuslikku suurust nimetatakse sündmuse A indikaatorfunktsiooniks ja tähistatakse sümboliga I_A.

Igale sündmusele vastab üheselt määratud indikaatorfunktsioon, teiselt poolt on ka indikaatorfunktsiooniga sündmus üheselt määratud: $A \equiv \{I_A = 1\}$.

Juhusliku suuruse $X = I_A$ jaotus on järgmine (põhjendada!):

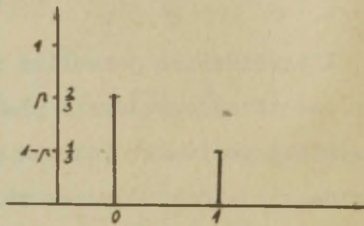
x_i	0	1
p_i	p	$1-p$

Selle jaotuse graafikut kujutab joonis 32 (juhul $p = \frac{2}{3}$).

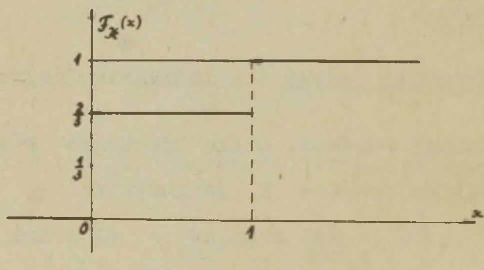
Juhusliku suuruse X jaotuse järgi on lihtne leida ka tema jaotusfunktsioon (põhjendada!)

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-p, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

millele vastaks graafik joonisel 33.



Joon. 32.



Joon. 33.

Kuna X on diskreetne juhuslik suurus, siis ei eksisteeri tal tõenäosuse tihedust.

Arvutame juhusliku suuruse X keskväärtuse:

$$EX = 1.p + 0(1 - p) = p .$$

Samal viisil on võimalik leida X mistahes järku momendid:

$$m_r = EX^r = 1^r.p + 0^r(1 - p) = p . \quad (r = 1,2,...)$$

Kasutades leitud momente, arvutame dispersiooni:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1 - p) .$$

Samuti on võimalik leida asümmeetriakordaja; arvutame selleks 3. tsentraalse momendi:

$$\bar{m}_3 = m_3 - 3mm_2 + 2m^3 = p - 3p^2 + 2p^3 = p(1-p)(1-2p) .$$

Näeme, et indikaatorfunktsioon on sümmeetriline ainult kolmel juhul:

$$\bar{m}_3 = 0 , \quad \text{kui} \quad \begin{array}{l} \text{a) } p = 0, \\ \text{b) } 1 - p = 0 , \text{ s. t. } p = 1, \\ \text{c) } 1 - 2p = 0 , \text{ s. t. } p = \frac{1}{2} . \end{array}$$

Esimesed kaks on triviaalsed juhud, kus sündmus A on kas peaaegu kindel ja toimub tõenäosusega 1 või peaaegu võimatu, s. t. toimub tõenäosusega 0 ; kolmas on aga juhtum, kus sündmuse A esinemine ja mitteesinemine on võrdse tõenäosusega sündmused.

BINOOMJAOTUS

2. Binomiaaljaotus.

Vaatleme katset, millel on kaks võimalikku tulemust A ja $B = \bar{A}$; olgu nende sündmuste tõenäosused vastavalt $P(A) = p$ ja $P(B) = 1 - p = q$.

Selline katse on näiteks mündivise, kui sündmuseks A loeme mündi kirjaga poole pealetulekut ($P(A) = \frac{1}{2}$) ; samuti kuulikese võtmine näites 3.1 kirjeldatud urnist, kus sündmuseks A on valge kuulikese esinemine ($P(A) = \frac{5}{8}$) jne.

Sooritame vaadeldavat katset n korda järjest, kusjuures eeldame, et k-nda katse tulemus ei sõltu sellest, missuguse tulemusega lõppesid eelnevad katsed (k=2,3,...,n).

Katseseeria tulemuseks võime saada 2^n erinevat katsetulemuste jada (mis koosnevad n elemendist).

Defineerime juhusliku suuruse X järgnevalt:

$X = k$, kui katseseeria tulemusena sündmus A esines täpselt k korda (s. t. X väärtuseks on sündmuse A esinemiste arv katseseerias). Ilmselt on meie juhusliku suuruse X võimalike väärtuste hulk $\{0,1,\ldots,n\}$.

Leiame nüüd juhusliku suuruse X jaotuse.

Selleks arvutame tõenäosuse sündmuse W_n^k jaoks, mis seisneb selles, et n katsest k korda esineb katsetulemus A $(k = 0,1,\ldots,n)$.

Sündmus W_n^k esineb näiteks siis, kui kõigepealt k korda järjest juhtub sündmus A, seejärel aga $n-k$ korda järjest sündmus B; samuti siis, kui A esineb kõigepealt $k-1$ korda, siis tuleb sündmus B $n-k$ korda ja viimaks toimub veel kord sündmus A (vt. tabelit, milles on esitatud kõikvõimalikud sündmuste A ja B kombinatsioonid veergudena juhul, kui $n = 7$, $k = 2$).

B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	A
B	B	B	B	B	B	A	A	A	A	B	B	B	B	A	B	B	B	B	A	B
B	B	B	A	A	A	B	B	B	A	B	B	B	A	B	B	B	B	A	B	B
B	A	A	B	B	A	B	B	A	B	B	B	A	B	B	B	B	A	B	B	B
A	B	A	B	A	B	B	A	B	B	B	A	B	B	B	B	A	B	B	B	B
A	A	B	A	B	B	A	B	B	B	A	B	B	B	B	A	B	B	B	B	B

Lõpuks esineb sündmus W_n^k ka siis, kui kõigepealt $n-k$ korda toimub sündmus B ja seejärel k korda sündmus A.

Iga selline üksiksündmus on omakorda n sõltumatu sündmuse (vastavalt A või B) korrutis, mille tõenäosuseks on kas p või q. Kasutame nüüd tõenäosuste korrutamise reeglit, pidades silmas, et iga kord peab sündmus A esinema täpselt k korda, sündmuse A k-kordse esinemise tõenäosuseks on aga p^k, sündmus B $n-k$ korda, selle tõenäosus on aga q^{n-k}. Seega saame iga üksiksündmuse tõenäosuseks $p^k q^{n-k}$. Paneme tähele ka seda, et kõik kirjeldatud üksiksündmused välistavad üksteist (igaüks neist erineb igast teisest vähemalt kahe katsetulemuse poolest), seega saame otsitava tõenäosuse leida üksiksündmuste summana. Pole raske näha, et üksiksündmuste arv on $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (kombinatsioonide arv n elemendist k kaupa); tõepoolest, k sündmust A saab esineda n katse korral nii mitmel viisil, kui palju on kombinatsioone n elemendist k kaupa; kõik ülejäänud katsed lõpevad sündmuse B toimumisega. Seega saame valemi:

$$P(W_n^k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

mis annab tõenäosuse selleks, et n katsest koosnevas seerias esineks tulemus A k korda. On ilmne, et kui n katset on sooritatud, siis esineb tulemus A kindlasti mingi arv k korda, kusjuures k võib omandada üksnes väärtusi nullist kuni n-ni, s. t.

$$W_n^0 \cup W_n^1 \cup \ldots \cup W_n^n = \Omega .$$

Kuna sündmused $\{W_n^k\}$ moodustavad üksteist välistavate sündmuste süsteemi (miks?), siis näeme ka, et tõenäosuste liitmise teoreemi kohaselt peab kehtima seos:

$$\sum_{k=0}^{n} P(W_n^k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 .$$

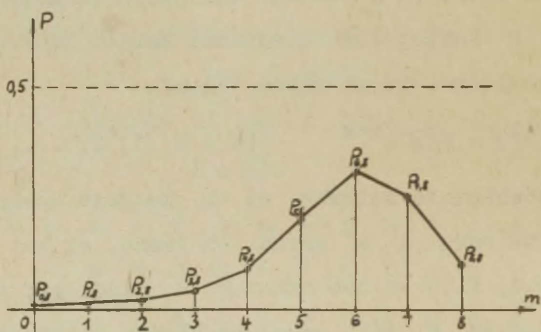
Olgu märgitud, et samasuguse summa saame ka binoomi $p + q$ n-nda astme arvutamisel: tõepoolest,

$$1^n = (p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} .$$

Et vastavalt juhusliku suuruse X definitsioonile omandab X väärtuse k parajasti siis, kui esineb sündmus W_n^k, saame valemi (1) põhjal kirjutada välja ka juhusliku suuruse X jaotuse

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n) . \qquad (2)$$

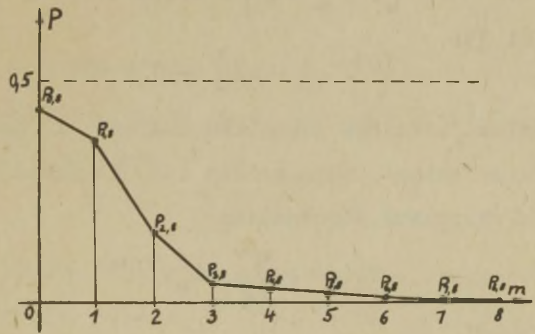
Jaotusega (2) määratud juhuslikku suurust nimetatakse <u>binomiaaljaotusega juhuslikuks suuruseks</u>, seost (2) aga binomiaaljaotuse valemiks (vt. joonised 34 ja 35).



Joon. 34. Binomiaaljaotus juhul, kui $p = \frac{3}{4}$, $n = 8$.

Binomiaaljaotusega juhuslik suurus on diskreetne. (Miks?) Joonistel 34 ja 35 on esitatud binomiaaljaotuse graafikud (jaotuspolügooni kujul) $n = 8$ ja $p = \frac{3}{4}$ ning $p = \frac{1}{10}$ korral. Siin on abstsissteljele märgitud sündmuse A esinemiste arv k (mis muutub nullist kuni katsete koguarvuni n) ning ordinaatteljele on kantud vastavalt sündmuse W_n^k tõenäosused.

Leiame binomiaaljaotusega juhusliku suuruse moodi.



Joon. 35. Binomiaaljaotus juhul, kui $p = \frac{1}{10}$, n=8.

Järjestikuste väärtuste tõenäosuste suhte jaoks saame väärtuse

$$\frac{P(X = m + 1)}{P(X = m)} = \frac{n - m}{m + 1} \cdot \frac{p}{q} \ .$$

(Miks?)

Seega $P(X = m + 1) > P(X = m)$, kui $(n - m)p > (m+1)q$, s. t., kui $np - q > m$ ning $P(X = m + 1) < P(X = m)$, kui $m > np - q$.

Seega on meil kaks võimalust:

a) Kui $np - q$ on täisarv, siis tähistame $np - q = m$ ja

$$P(X = m) = P(X = m + 1) ,$$

s. t. jaotusel on maksimaalne väärtus kahe järjestikuse täisarvu m ja $m + 1$ korral;

b) Kui $np - q$ ei ole täisarv, siis tähistame

$$m = [np - q] + 1$$

ning jaotus saavutab moodi X väärtusel m.

Joonisel 34 on moodiks vastavalt

$$\left[8 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right] + 1 = 6$$

ja joonisel 35:

$$\left[8 \cdot \frac{1}{10} - \frac{9}{10}\right] + 1 = 0 .$$

Binomiaaljaotusega juhusliku suuruse X jaotusfunktsiooni avaldise leiame, summeerides iga x jaoks kõigi x-st väiksemate väärtuste tõenäosused:

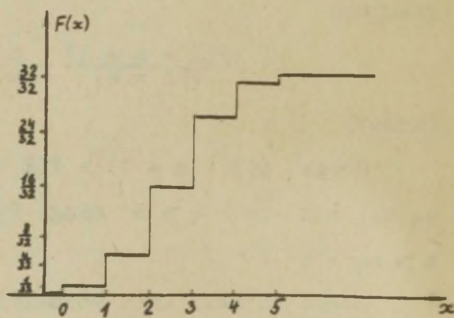
$$F_X(x) = \sum_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k} .$$

(Põhjendada!)

Jaotusfunktsiooni graafik binomiaaljaotuse jaoks juhul $n = 5$, $p = \frac{1}{2}$ on esitatud joonisel 36.

Binomiaaljaotusel ei eksisteeri tõenäosuse tihedust. (Miks?)

Mitmesugustes arvutustes on sageli otstarbekas kasutada asjaolu, et binomiaaljaotusega juhuslik suurus X on esitatav n sõltumatu ühesuguse jaotusega indikaatorfunktsiooni summana:



Joon. 36.

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i} , \quad P(A_i) = p .$$

Tõepoolest, $I_{A_i} = 1$ parajasti siis, kui i-ndal katsel esineb tulemus A ; $\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = k$ parajasti siis, kui leidub k sellist katset $i_1, i_2, \ldots, i_k$, mille korral tulemuseks osutub A ; samuti on aga binomiaaljaotus defineeritud.

Kasutades keskväärtuse omadust 2^o ja indikaatorfunktsiooni keskväärtust, saame leida binomiaaljaotusega juhusliku suuruse X keskväärtuse:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} E(I_{A_i}) = np . \tag{3}$$

Samuti leiame juhusliku suuruse X dispersiooni, kasutades dispersiooni omadust 5^o (selgitada vajalike eelduste täidetus!):

$$DX = \sum_{i=1}^{n} DI_{A_i} = npq . \tag{4}$$

Leiame veel binomiaaljaotusega juhusliku suuruse kolmanda tsentraalse momendi. Püüame ka siin kasutada binomiaaljaotuse avaldist indikaatorfunktsioonide kaudu.

Olgu $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kus X_i-d moodustavad täielikult sõltumatu süsteemi. Siis

$$Y - EY = \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) ,$$

$$(Y - EY)^3 = (\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i))^3 \text{ ja}$$

$$E(Y - EY)^3 = E(\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i))^3 = E(\sum_{i=1}^{n} X_i - EX_i)^3 +$$
$$+ 3E(\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (X_j - EX_j)^2 +$$
$$+ E(\sum_{i=1}^{n} X_i - EX_i) \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} (X_j - EX_j) \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} (X_k - EX_k)) =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)^3\right) + 3E \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)\, E\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X_j - EX_j)^2 +$$

$$+ E\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)\right) . E\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (X_j - EX_j)\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n} (X_k - EX_n)\right) =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)^3\right) .$$

Seega

$$E(Y - EY)^3 = \sum_{i=1}^{n} E(X_i - EX_i)^3 ,$$

ja binomiaaljaotusega juhusliku suuruse X kolmas tsentraalne moment $E(X - EX)^3$ avaldub järgmiselt

$$E(X - EX)^3 = np(1 - p)(2 - p) ;$$

seega saame mittetriviaalsel juhul, kui $0 < p < 1$, binomiaaljaotuse sümmeetria tingimuseks $p = \frac{1}{2}$.

Binomiaalset jaotusseadust on võimalik rakendada mitmesuguste ülesannete lahendamisel.

<u>Näide 1</u>. Perekonnas on 10 last. Lugedes poisi sündimise tõenäosuseks 0,5 (tegelikult on see arv demograafilise materjali põhjal ligikaudu 0,52), ja eeldades, et iga lapse sugu on sõltumatu varem sündinud laste soost (tegelikult eksisteerib nõrk sõltuvus) arvutada tõenäosus selleks, et perekonnas on 5 poega? 7 poega? 10 poega?

Ülesande lahendamiseks leiame:

$$p(W_{10}^{10}) = 1 . \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0,1\ \% ,$$

$$p(W_{10}^{7}) = \frac{10.9.8}{1\ 2\ 3} \cdot \frac{1}{1024} \approx 11,7\ \% ,$$

$$p(W_{10}^{5}) = \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{1}{1024} \approx 24,6\ \% .$$

3. Hüpergeomeetriline jaotus.

Selle jaotusega tutvumiseks on sobivaim järgmine klassikaline katseskeem:

Olgu meil urn, mis sisaldab M musta ja $N - M$ valget kuuli. Urnist võetakse n $(n \leq N)$ korda juhuslikult kuul, seda tagasi asetamata.

Olgu juhuslikuks suuruseks X saadud n kuuli hulgas sisalduvate mustade kuulide arv.

Ilmselt on X jaotus määratud valemiga

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} ,$$

ning X võimalikud väärtused on $k = \max(0, n - N + M), \ldots, \min(M, n)$. (Tõestada!)

<u>Ülesanne</u>:

Fikseerime $N = 10$, $M = 6$, $n = 5$. Leida X jaotus ja seda kasutades avaldada jaotusfunktsioon. Valmistada graafikud. Leida EX ja DX .

4. Poissoni jaotus.

Vaatleme juhuslikku suurust X , mille jaotus on määratud valemiga

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} , \qquad (5)$$

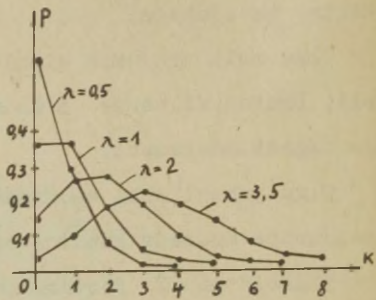
kus λ on suvaline positiivne arv.

Niisugust jaotust nimetatakse Poissoni jaotuseks. Mõningate λ väärtuste jaoks on Poissoni jaotuse graafik (polügooni kujul) esitatud joonisel 37.

Näeme, et Poissoni jaotusega juhuslik suurus on diskreetne ja lõpmatu hulga väärtustega.

Poissoni jaotusega juhusliku suuruse jaotusfunktsioon (vt. joonis 38) avaldub summana:

$$F_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!} ;$$



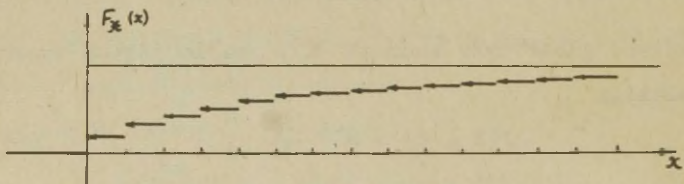
Joon. 37.

Poissoni jaotusega juhusliku suuruse X keskväärtus avaldub lõpmatu summana:

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda ;$$

(siin kasutasime seost $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$) .



Joon. 38.

Dispersiooni arvutamiseks leiame kõigepealt teise momendi:

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} =$$

$$= \lambda^2 \; e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda .$$

Dispersioon avaldub siis vahena $EX^2 - (EX)^2$:

$$DX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

Leiame veel Poissoni jaotuse moodi:

$$\frac{P(X = m + 1)}{P(X = m)} = \frac{\lambda}{m + 1} ;$$

seega $P(X = m + 1) > P(X = m)$ siis, kui $\lambda > m + 1$, s. t. $m < \lambda - 1$; ning $P(X = m + 1) < P(X = m)$ siis, kui $\lambda < m + 1$; s. t. $m > \lambda - 1$. Kui $m = \lambda - 1$, siis $P(X = m + 1) = P(X = m)$, seega kõige tõenäolisemad on X väärtused λ ja $\lambda - 1$; kui aga λ ei ole täisarv, siis on X kõige tõenäolisemaks väärtuseks

$$[\lambda - 1] + 1 .$$

Kui aga $\lambda < 1$, siis on juhusliku suuruse X kõige tõenäolisemaks väärtuseks 0 . Näitena vaadeldud juhul $\lambda = 2$ on kõige tõenäolisemateks väärtusteks $X = 1$ ja $X = 2$; $P(X = 1) = P(X = 2) = 2e^{-2}$. Leiame veel Poissoni jaotusega juhusliku suuruse asümmeetria: selleks arvutame kõigepealt kolmanda momendi:

$$EX^3 = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^3 \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \left[\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} \lambda^k + 3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} \lambda^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} \right] = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda ;$$

$$E(X - EX)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda(\lambda^2 + \lambda) + 2\lambda^3 = \lambda .$$

Kuna Poissoni jaotuse korral on mittetriviaalsel juhul $\lambda>0$, siis on see juhuslik suurus ka alati asümmeetriline.

Näide 2. Poissoni jaotus sobib mitmesuguste looduses ja tehnikas esinevate protsesside kirjeldamiseks.

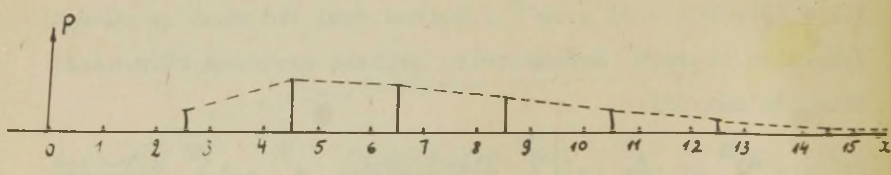
Poissoni jaotusega on näiteks radioaktiivse aine korral lagunevate aatomite arv ajaühikus, telefonikeskjaama teatud ajavahemiku vältel laekuvate väljakutsete arv jne.

5. Üldistatud Poissoni jaotus.

Mõningate probleemide uurimisel pakub huvi ka Poissoni jaotusega juhuslikust suurusest üldisema jaotusega diskreetse, lõpmata paljude väärtustega juhusliku suuruse uurimine, mille jaotus on esitatav valemiga

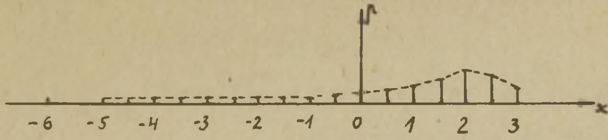
$$P(X = a + kb) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad (-\infty < a, b < \infty) . \qquad (6)$$

Nagu näha, on üldistatud Poissoni jaotus saadud seosega (5) defineeritud Poissoni jaotusest nihke (a võrra) ja venituse (b korda) tagajärjel; juhul, kui $b < 0$, lisandub ka peegeldus. Joonistel 39 ja 40 on kujutatud üldistatud



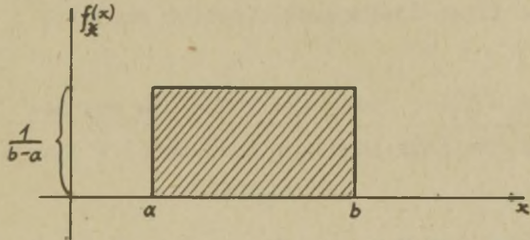
Joon. 39.

Poissoni jaotuse graafikud, mis on saadud joonisel 37 kujutatud jaotusest juhul $\lambda = 2$ vastavalt järgnevate a ja b väärtuste korral: $a = 2{,}5$; $b = 2$



Joon. 40.

ja $a = 3$; $b = -0{,}5$.



Joon. 41.

Üldistatud Poissoni jaotuse arvulised karakteristikud leiame vastavatest Poissoni jaotuse arvulistest karakteristikutest, kasutades karakteristikute omadusi:

$$EX = a + bE(Y) = a + b\lambda ,$$

kus $Y \sim P(\lambda)$;

$$DX = b^2 D(Y) = b^2 \lambda .$$

Ka üldistatud Poissoni jaotus ei ole ühegi $\lambda > 0$ korral sümmeetriline. (Miks?)

6. Ühtlane jaotus.

Me ütleme, et X on ühtlase jaotusega juhuslik suurus, kui tema tõenäosuse tihedus $f_X(x)$ on määratud seosega:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \tag{7}$$

kus a ja b on suvalised reaalarvud, $a < b$. Sümboolselt märgime seda vastavust:

$$X \sim U(a,b) .$$

Ühtlase jaotusega juhusliku suuruse tõenäosuse tiheduse graafik on kujutatud joonisel 41.

(Kontrollida tõenäosuse tiheduse omaduste 1°, 2° ja 3° täidetust!)

Leiame ühtlase jaotusega juhusliku suuruse X jaotusfunktsiooni. Selleks kasutame seosest (5.11) tuletatud võrdust:

$$F_X(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt .$$

Kui $x < a$, näeme, et $F_X(x) = 0$;

kui $a \leqslant x \leqslant b$, saame:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dt = \frac{x-a}{b-a};$$

kui $x > b$, saame:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dt = 1 ,$$

seega

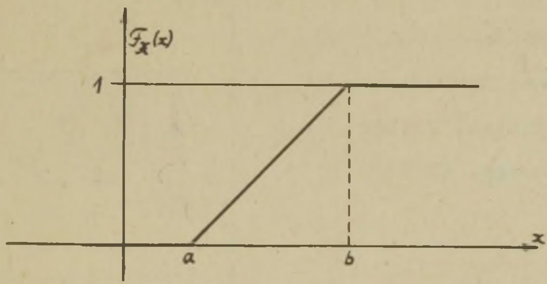
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

(Vt. joonis 42.)

Leiame nüüd ühtlase jaotusega juhusliku suuruse arvulised karakteristikud.

Et ühtlasel jaotusel eksisteerib tõenäosuse tihedus, siis saame EX arvutada valemit (6.4) kasutades:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{b + a}{2} .$$



Joon. 42.

Saadud tulemus on ka intuitiivselt täiesti ootuspärane. Arvutame ka teist järku momendi ja dispersiooni:

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} ;$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b + a}{2}\right)^2 = \frac{(a - b)^2}{12} .$$

Jaotuse sümmeetrilisuse kontrollimiseks leiame veel ka EX^3 :

$$EX^3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x) dx = \frac{1}{b-a} \frac{(b^4 - a^4)}{4} = \frac{(b + a)(b^2 + a^2)}{4} ;$$

$$E(X - EX)^3 = \frac{(b + a)(b^2 + a^2)}{4} - 3\frac{(b + a)}{2}\left(\frac{b^2 + ab + a^2}{3}\right) + $$
$$+ 2\frac{(b + a)^3}{8} = 0 .$$

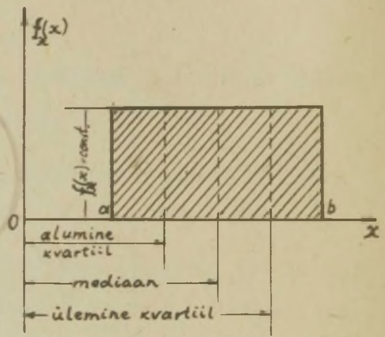
Seega on meil iga a ja b korral tegemist sümmeetrilise jaotusega. Tulemus on jällegi täiesti ootuspärane.

Kuna ühtlase jaotuse tõenäosuse tihedus on konstantne, ei eksisteeri ühtlase jaotusega juhuslikul suurusel moodi. Seevastu eksisteerivad kõik kvantiilid (vt. joonis 43); viimaste leidmine on lihtne:

$$x_p = a + (b - a)p .$$

(Põhjendada!)

Ühtlase jaotuse mediaan on ilmselt võrdne keskväärtusega. (Miks?)



Joon. 43.

7. Normaaljaotus.

Vaatleme juhuslikku suurust X , mille tõenäosuse tihedus on määratud valemiga

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} , \qquad (8)$$

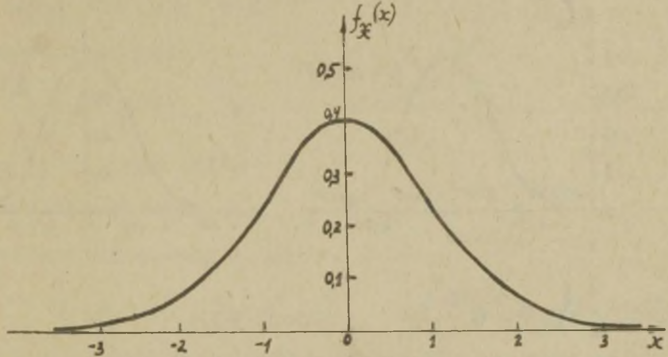
siin m ($-\infty < m < \infty$) ja σ ($0 < \sigma < \infty$) on jaotuse parameetrid. (Kontrollida, kas $f_X(x)$ rahuldab tõenäosuse tiheduse omadusi $1^0 - 3^0$.) Kasutame siin matemaatilisest analüüsist tuntud seost:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi} .$$

Sellise jaotusega juhuslikku suurust nimetatakse normaaljaotusega juhuslikuks suuruseks; sümboolselt tähistame seda vastavust

$$X \sim N(m, \sigma) .$$

Parameetri väärtustega $m = 0$ ja $\sigma = 1$ normaaljaotuse tiheduse graafikut kujutab joonis 44.



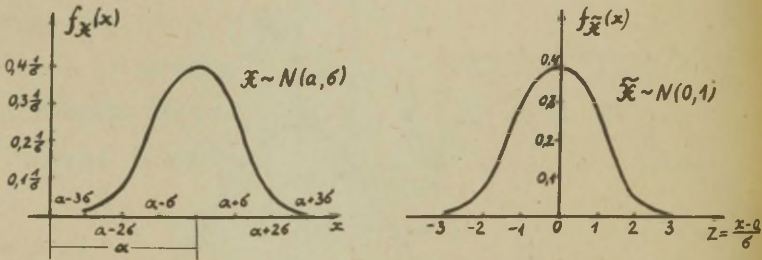
Joon. 44.

On lihtne näha, et maksimumi omandab jaotusega (8) määratud kõver punktis $x = m$ (miks?) (antud juhul punktis $m = 0$), kõver on maksimumpunkti ümbruses kumer (tõestada), omab käänupunkte punktides $m - \sigma$ ja $m + \sigma$ (tõestada) ning on piirkondades $(-\infty, m - \sigma)$ ja $(m + \sigma, \infty)$ nõgus.

Funktsioon $f_X(x)$ on positiivne iga x väärtuse korral $(-\infty < x < \infty)$ (miks?), kuid läheneb asümptootiliselt x-teljele selle mõlemas suunas (miks?). Tõenäosuse tiheduse $f_X(x)$ väärtused saab iga x jaoks vahetult arvutada valemist (8), kuid tuleb märkida, et jaotuse $N(0, 1)$ jaoks on nende väärtused ka tabuleeritud (vt. tabel 8); seda tabelit kasutades saame leida ka $f_X(x)$ väärtused mistahes parameetrite korral (vt. joonis 45).

Tõepoolest, olgu $X \sim N(m, \sigma)$. Siis $\tilde{X} = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0,1)$ (miks?), ning valemist (8) näeme, et

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} f_{\tilde{X}}\left(\frac{x - m}{\sigma}\right).$$



$= f_X(x) = \frac{1}{\sigma} f_{\tilde{X}}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$

Joon. 45.

Näide 3. Olgu $X \sim N(3, 2)$. Leiame $f_X(4)$.

$$f_X(4) = \frac{1}{2} f_{\tilde{X}}\left(\frac{4 - 3}{2}\right) = \frac{1}{2} f_{\tilde{X}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 0,3521 \approx 0,176$$

(arvu 0,3521 leidsime tabelist 8). Vahetult arvutades saaksime:

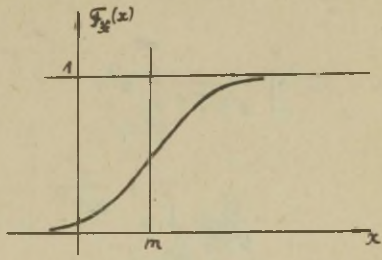
$$f_X(4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(4-3)^2}{2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot 0,881 \approx 0,176 .$$

Normaaljaotuse jaotusfunktsiooni (vt. joonis 46) leiame integreerimisel

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt .$$

Kahjuks pole see integraal elementaarselt avalduv. Seevastu on jaotusfunktsiooni väärtused juhul $m = 0, \sigma = 1$ tabuleeritud (vt. tabel 4); arvestades, et alati, kui $X \sim N(m, \sigma)$, on $\tilde{X} = \frac{X - m}{\sigma}$ normaaljaotusega, $\tilde{X} \sim N(0,1)$; seega saame leida suvalise normaaljaotusega juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni väärtuse mistahes argumendi korral:



Joon. 46.

$$F_X(x) = F_{\tilde{X}}\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) . \quad (9)$$

<u>Näide 4</u>. Leiame nüüd näites 3 vaadeldud juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni kohal $x = -1$:

$$F_X(-1) = F_{\tilde{X}}\left(\frac{-1 - 3}{2}\right) = F_{\tilde{X}}(-2) = 0{,}0228 .$$

Leiame nüüd normaaljaotusega juhusliku suuruse arvulised karakteristikud:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - m}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{m}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m;$$

tõepoolest,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - m}{2\sigma^2} e^{-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma\, e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 ;$$

aga

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 .$$

Juhusliku suuruse X dispersiooni leidmisel peame silmas, et dispersioon ei muutu nihke tagajärjel, s. t.

$$DX = D\bar{X}\ , \quad \text{kus} \quad \bar{X} = X - EX\ .$$

Seega võime arvutada juhusliku suuruse $X \sim N(0,\sigma)$ dispersiooni:

$$\boxed{DX = EX^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = -\frac{\sigma x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sigma^2 .$$

Integreerisime siin ositi:

$$\frac{x}{\sigma}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = du\ ; \quad u = -\sigma\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ ,$$

$$x = v\ ; \quad dv = dx\ ,$$

ning liidetavate väärtusteks saime:

$$-\frac{\sigma x\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[\lim_{x\to\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \lim_{x\to-\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right] = 0;$$

kuid $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sigma\ .$

Seega näeme, et normaaljaotuse parameetriteks on vaadeldava juhusliku suuruse keskväärtus ja standardhälve. Vastavalt sellele on normaaljaotus parameetritega 0 ja 1 normeeritud ja tsentreeritud ehk normaliseeritud normaaljaotus.

Pole raske leida ka normaaljaotusega juhusliku suuruse kolmandat tsentraalset momenti.

$$E(X - EX)^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 0 .$$

(Arvutada!). Seega on iga normaaljaotus oma keskpunkti suhtes sümmeetriline.

Neljanda tsentraalse momendi väärtuseks leiame:

$$E(X - EX)^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 3\sigma^4 .$$

(Arvutada!)

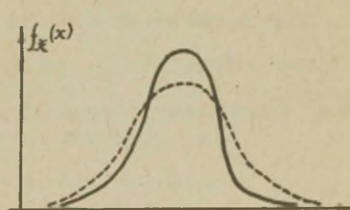
Neljandat tsentraalset momenti kasutatakse suvalise juhusliku suuruse jaotuse võrdlemiseks normaaljaotusega. Suurust

$$e = \frac{\bar{m}_4}{(DX)^2} - 3$$

nimetatakse juhusliku suuruse ekstsessiks; nagu näeme, on normaaljaotuse korral

$$e = 0 .$$

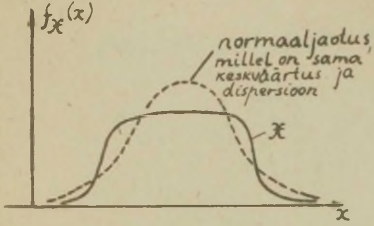
Näide positiivse ekstsessiga juhusliku suuruse kohta on toodud joonisel 47, joonis 48 aga illustreerib negatiivse ekstsessiga juhuslikku suurust (võrdluseks on mõlemale joonisele paigutatud sama keskväärtuse ja dispersiooniga normaaljaotuse tõenäosuse tiheduse kõver.



Joon. 47.

Normaaljaotusega juhuslikul suurusel eksisteerivad kõik kvantiilid; neid on võimalik leida normaaljaotuse tabelist (kuidas?).

Paneme tähele, et normaaljaotuse korral langevad ühte keskväärtus, mood ja mediaan. (Miks?)



Joon. 48.

Osutub, et

$F_X(-1) \approx \frac{1}{6}$, $F_X(1) \approx \frac{5}{6}$,

kui $\widetilde{X} \sim N(0,1)$;

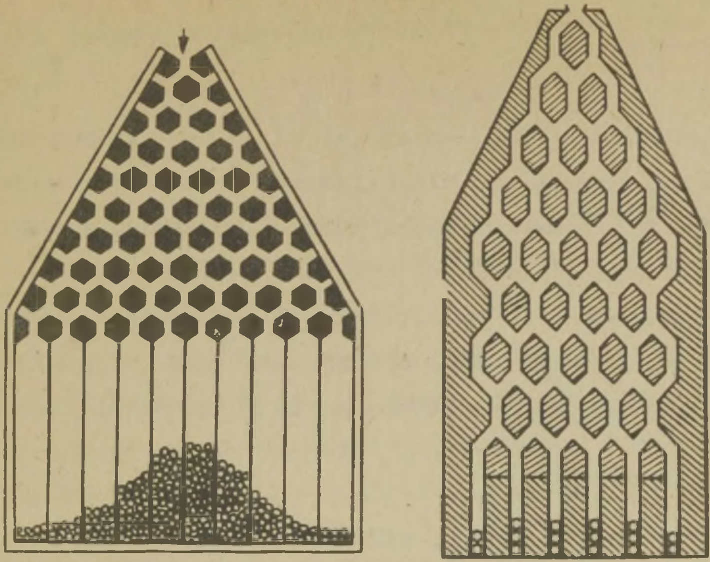
üldiselt aga

$F_X(m - \sigma) \approx \frac{1}{6}$; $F_X(m + \sigma) \approx \frac{5}{6}$,

seega on sekstiilide vahe ligikaudu võrdne kahekordse standardhälbega.

Paljud looduses toimuvad protsessid on kirjeldatavad normaaljaotuse abil. Nii on näiteks mingisuguse suuruse mõõtmistulemus normaaljaotusega (kusjuures keskväärtuseks on mõõdetava tulemuse õige väärtus, dispersioon on aga seda suurem, mida ebatäpsemad on mõõtmised). Paljude juhuslike sõltumatute faktorite mõju summa on väga üldistel eeldustel normaalse jaotusega (vt. § 8). Huvitavaks illustratsiooniks normaaljaotuse n.-õ. "loomuliku" esinemise kohta on järgmine klassikaline katse Galtoni võrega (vt. joonis 49).

Katseseadeldise aluseks olevale lauale lastakse suur arv kuulikesi. Vastu naelu juhuslikult põrkudes satuvad nad vahedesse, moodustades normaaljaotuse kõveraga väga sarnase kujundi.



Radioaktiivse aine iga üksik aatom laguneb juhuslikul ajamomendil.

Vaatleme mingit konkreetset aatomit, mis ei ole antud ajamomendini lagunenud. Tõenäosus selleks, et ta järgneva ajavahemiku vältel laguneb, sõltub üksnes selle ajavahemiku pikkusest t. Tähistame selle tõenäosuse sümboliga $F(t)$; siis tõenäosus selleks, et aatom aja t vältel ei ole lagunenud $G(t)$ on $1-F(t)$. Funktsioon $G(t)$ on monotoonselt kahanev;

$$G(0) = 1 . \tag{10}$$

Vaatleme veel mingit teist ajavahemikku s. Siis $G(s+t)$ on tõenäosus selleks, et aatom ei ole ajavahemiku $s+t$ vältel lagunenud; see on nii parajasti siis, kui aatom pole lagunenud ei ajavahemiku s ega ka ajavahemiku t vältel, s. t.

$$G(s+t) = G(s)G(t) . \tag{11}$$

On võimalik kontrollida, et tingimusi (10) ja (11) rahuldab funktsioon

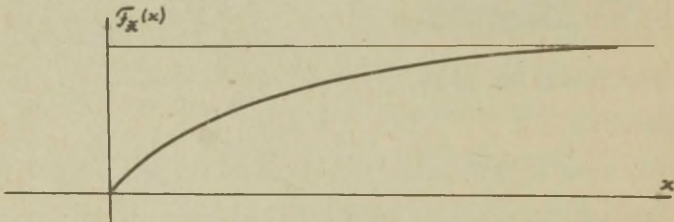
$$G(x) = e^{-\lambda x} \quad (-\infty < \lambda < \infty) .$$

Siit järeldub, et

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad (12)$$

kus jaotusfunktsiooni omaduste põhjal $\lambda > 0$. (Kontrollida!) Juhuslikku suurust X, mille jaotusfunktsioon on määratud seosega (12), nimetatakse eksponentsiaaljaotusega juhuslikuks suuruseks ($\lambda > 0$).

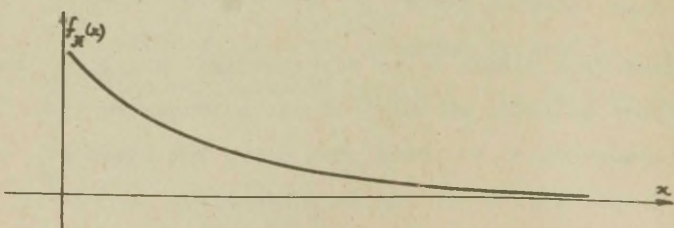
Seega näeme, et radioaktiivse aine iga aatomi lagunemismoment kui juhuslik suurus on eksponentsiaaljaotusega. Eksponentsiaalse jaotusfunktsiooni graafik on kujutatud joonisel 50.-



Joon. 50.

Tõenäosuse tiheduse aga leiame jaotusfunktsiooni diferentseerimisel (vt. joonis 51):

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



Joon. 51.

Juhusliku suuruse X keskväärtuse leiame integreerimisel:

$$EX = \lambda \int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx = -\,xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Leida DX !

Nagu nägime, on eksponentsiaaljaotusega juhusliku suuruse tõenäosuse tiheduse maksimum punktis $x = 0$ (tõestada!), ja ta ei ole sümmeetriline. (Miks?)

Vaadeldaval juhuslikul suurusel eksisteerivad kõik kvantiilid (miks?), mida võib leida lihtsa arvutuse teel.

Olgu märgitud, et eksponentsiaaljaotusega on võimalik kirjeldada mitmeid looduses ja tehnikas esinevaid protsesse: näiteks töötavate aparaatide (sõlmede) väljalangemine juhuslike rikete tagajärjel toimub eksponentsiaaljaotuse kohaselt jne.

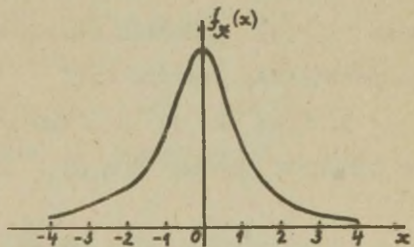
9. Cauchy jaotus.

Vaatleme juhuslikku suurust X , mille tõenäosuse tihedus (vt. joonis 52) on määratud seosega:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Jaotusfunktsiooni $F_X(x)$ leiame tõenäosuse tiheduse integreerimisel:

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x\right). \quad (13)$$



Joon. 52.

On lihtne näha, et $f_X(x)$ on sümmeetriline funktsioon (miks?), samuti, et $\max f_X(x) = f_X(0)$, (tõestada!), seega on punkt 0 juhusliku suuruse X mediaaniks ja moodiks; ka kõik jaotuse kvantiilid võib leida vahetu arvutamise teel valemist (13).

Kui aga püüame leida juhusliku suuruse keskväärtust EX, näeme, et see ei eksisteeri:

$$EX = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{\infty},$$

seega integraal ei koondu absoluutselt. Järelikult ei eksisteeri ka dispersioon jt. momendid.

Olgu X ja Y sõltumatud normaaljaotusega juhuslikud suurused, kusjuures DX = DY = 1. Siis juhuslik suurus $Z=\frac{X}{Y}$ on Cauchy jaotusega.

10. Ülesandeid.

1. Olgu $p = \frac{1}{2}$. Mitu erinevat väärtust omandab binomiaaljaotusega $B(n,p)$ juhuslik suurus X, kui n on paarisarv; paaritu arv?

2. Millise k väärtuse korral omandab binomiaaljaotusega $B(n,p)$ juhuslik suurus maksimaalse väärtuse, kui n on paarisarv; paaritu arv?

3. Olgu k ja p fikseeritud. Juhuslikul suurusel X_n on binomiaaljaotus $B(n,p)$. Leida

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k).$$

4. Olgu ühel katsel k erinevat võimalikku tulemust A_i $(i=1,2,\dots,k)$ vastavalt tõenäosustega

$$P(A_i) = p_i \,, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \,. \tag{14}$$

Tähistame sündmuse, et n katse korral sündmus A_1 esineb r_1 korda, A_2 - r_2 korda, ..., A_k - r_k korda $(r_i \geq 0 \,; \sum_{i=1}^{k} r_i = n)$ sümboliga $W_n^{r_1, r_2, \ldots, r_k}$; siis

$$P(W_n^{r_1, r_2, \ldots, r_k}) = n! \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{r_i}}{r_i!} \tag{15}$$

(Tõestada see seos!)

Vaatleme juhuslikku vektorit $X = (X_1, \ldots, X_n)$, mille iga komponent X_i omandab väärtuse r_i parajasti siis, kui sündmus A_i toimub r_i korda. Sellist juhuslikku vektorit nimetatakse polünomiaaljaotusega juhuslikuks vektoriks.

Kirjutada välja vektori X jaotus.

Kas vektori komponendid X_1, ..., X_n on sõltuvad, paarikaupa sõltumatud või täielikult sõltumatud?

Missuguse jaotuse saame erijuhul, kui $k = 2$? Mida võime öelda sel juhul X_1 ja X_2 omavahelise seose kohta?

Olgu $k = 3$. Leida X_1 ja X_2 vaheline korrelatsioonikordaja.

5. Vaatleme katset, millel on 2 võimalikku tulemust A ja $\bar{A} = B$ vastavalt tõenäosustega $P(A) = p$ ja $P(B) = q$.

Teostame seeria sõltumatuid katseid.

Defineerime juhusliku suuruse X , mille väärtuseks on k parajasti siis, kui sündmus A esmakordselt esines k-ndal katsel $(k=0,1,\ldots)$.

Sellist juhusliku suuruse jaotust nimetatakse mõnikord geomeetriliseks jaotuseks. Ta kuulub erijuhuna üldisemasse jaotuste perre, mistõttu teda nimetatakse ka 1. järku nega-

<u>tiivseks binomiaaljaotuseks</u>.

Leida 1. järku negatiivse binomiaaljaotusega juhusliku suuruse jaotus! Milliseid näiteid oleme seni vaadelnud, kus juhuslikel suurustel on negatiivne binomiaaljaotus?

6. Sama katseseeria abil saame kirjeldada ka k-järku negatiivset binomiaaljaotust.

Juhuslikku suurust X, mille väärtuseks on k parajasti siis, kui sündmus A esineb r-ndat korda k-ndal katsel, nimetatakse r-järku negatiivse binomiaaljaotusega juhuslikuks suuruseks; r-järku negatiivse binomiaaljaotuse valem on järgmine:

$$P(X = r+k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k \qquad (k=0,1,\ldots) .$$

Tõestada see valem!

Leida EX!

(Kasutada lahendamiseks binomiaaljaotust!)

7. Leida ühtlase jaotusega $\mathcal{U}(-1,1)$ juhusliku suuruse ekstsess; milliste parameetritega normaaljaotusega tuleks seda jaotust võrrelda?

8. Kasutades ülesandes 5.1 tuletatud valemit, leida sõltumatute juhuslike suuruste X ja Y summa tõenäosuse tihedus,

$$f_{X+Y}(x) \text{ , kui } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & x \in [0,a], \\ 0, & x \notin [0,a], \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-c}, & x \in [c,b], \\ 0, & x \notin [c,b], \end{cases}$$

kui kehtivad seosed a) $0 < a < c < b$,

b) $0<c<a<b$,

c) $0<c<b<a$.

Sellisel viisil defineeritud juhuslikku suurust $Z=X+Y$ nimetatakse Simpsoni jaotusega juhuslikuks suuruseks (vt. ka III 3.14).

---+---

1. Mis on tõenäosem, kas võita võrdse vastasega mängides

a) 3 partiid 4-st või 5 partiid 8-st?

b) vähemalt 3 partiid 4-st või vähemalt 5 partiid 8-st?

c) ülimalt n partiid 2n partiist või üle n-1 partii 2n partiist?

d) ülimalt n partiid 2n+1 partiist või üle n-1 partii (2n+1)-st partiist?

2. Osakonna üliõpilastest 30 % olid noormehed. Nimekirja järgi valiti 10 esimest. Kui suur on tõenäosus, et nende üliõpilaste hulgas on 3 noormeest? Vähemalt 3 noormeest?

(Kasutada lahendamiseks binomiaaljaotust!)

3. Partiis sisalduvatest detailidest on 1 % praak. Kui suur kogus detaile tuleks kontrollida, et selles tõenäosusega 0,95 sisalduks vähemalt üks praakdetail?

(Kasutada lahendamiseks binomiaaljaotust!)

§ 8. P i i r t e o r e e m i d.

1. Binomiaaljaotusega juhuslike suuruste jadad.

Vaatleme binomiaaljaotusega juhuslikke suurusi $X_n \sim B(n,p)$, kusjuures eeldame, et p on sama iga X_n korral, kuid $n \to \infty$.

Osutub, et sel juhul ka

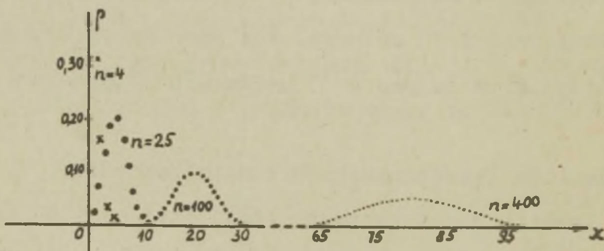
$$\lim_{n\to\infty} EX_n = np \to \infty ,$$

$$\lim_{n\to\infty} DX_n = npq \to \infty ,$$

ning

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le k\le n} P(X_n = k) \to 0 .$$ (Tõestada viimane seos!)

Vastavate jaotuste graafikud on esitatud joonisel 53 n väärtustel 4, 25, 100 ja 400; $p = \frac{1}{5}$.



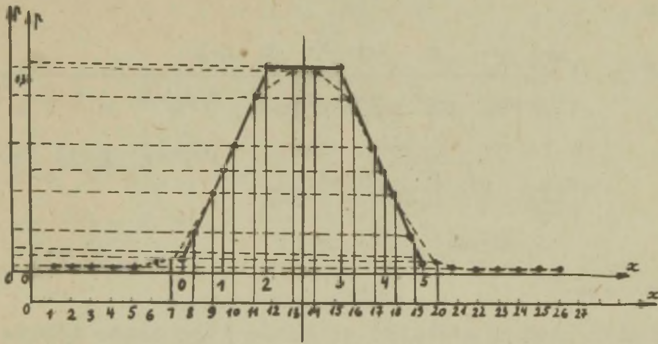
Joon. 53.

Järgnevalt vaatleme normeeritud ja tsentreeritud binomiaaljaotusega juhuslikke suurusi

$$Y_n = \frac{X_n - EX_n}{\sqrt{DX_n}} = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} ; \quad \text{ilmselt } EY_n = 0, \quad DY_n = 1 .$$

Nende suuruste Y_n jaotuste graafikud on kujutatud joonisel 54.

Näeme, et n suurenedes läheneb Y_n jaotuspolügoon aina rohkem normeeritud ja tsentreeritud normaaljaotuse tõenäosuse tiheduse kõverale.



Joon. 54.

Selle tähelepaneku range tõestus ongi järgneva teoreemi - nn. klassikalise piirteoreemi ehk Moivre-Laplace'i teoreemi sisuks.

2. Moivre-Laplace'i teoreem.

Teoreem 1. Olgu X_n binomiaaljaotusega $B(n,p)$ juhuslik suurus ning $Y_n = \frac{1}{\sqrt{npq}}(X_n - np)$.

Siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P\left(Y_n = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\, e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}} = 1 . \quad (1)$$

(See tähendab, et Y_n jaotuspolügooni tipud lähenevad normaaljaotuse tiheduskõvera sama abstsissiga punktidele.)

Tõestus:

$$P(Y_n = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}) = P(X_n = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k q^{n-k}\,.$$

Rakendades Stirlingi valemit faktoriaalide arvutamiseks

$$n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n\, e^{-n}\, e^{\theta_n}\,, \text{ kus } \theta_n = o(n^{1})\,,$$

saame:

$$C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\; n^n\; e^{-n}\, e^{\theta_n}\, p^k\, q^{n-k}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\,\sqrt{k}\,\sqrt{n-k}\; k^k (n-k)^{n-k} e^{-k}\; e^{-n+k}\, e^{\theta_k}\, e^{\theta_{n-k}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \cdot e^{\theta_n-\theta_k-\theta_{n-k}}\,.$$

Siin $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\theta_n-\theta_k-\theta_{n-k}} = 1$, kui vaid $k\to\infty$ ja $n-k\to\infty$.

Paigutades saadud avaldise seosesse (1), saame tõestamist vajavale seosele anda kuju:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}}{\frac{1}{\sqrt{npq}}} \cdot \frac{\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}}{e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}} = 1\,. \qquad (2)$$

Saadud seose tõestamiseks on piisav, kui me näitame, et mõlema teguri piirväärtuseks n lähenemisel lõpmatusele on 1.

Ilmselt selleks, et

$\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = 1$, on piisav, et $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{Z_n^2} = 1$, kui $Z_n > 0$;

seega on avaldise (2) esimese teguri piirväärtuse uurimiseks piisav uurida avaldise

$$\frac{k(n-k)}{n^2pq}$$

piirväärtust.

Tähistame nüüd $\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = x_k$; siis $k = np+x_k\sqrt{npq}$,

$n-k = nq-x_k\sqrt{npq}$.

Saame:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(np+x_k\sqrt{npq})(nq-x_k\sqrt{npq})}{n^2pq} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2pq}{n^2pq} + \frac{(q-p)x_k}{\sqrt{npq}} - \frac{x_k^2}{n}\right] = 1 , \qquad (3)$$

kui $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_k}{\sqrt{n}} = 0$..

Avaldise (2) teise teguri lugejat teisendades saame:

$$\left(\frac{np}{k}\right)^k = \left(\frac{np}{np+x_k\sqrt{npq}}\right)^k = \left(1 - \frac{x_k\sqrt{npq}}{np+x_k\sqrt{npq}}\right)^{np+x_k\sqrt{npq}} ,$$

$$\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} = \left(1 + \frac{x_k\sqrt{npq}}{nq-x_k\sqrt{npq}}\right)^{nq-x_k\sqrt{npq}} .$$

Kasutame nüüd reaksarendusi:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots,\right]$$

kus $|x| < 1$.

Saame:

$$\ln\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} = k\ln\left(\frac{np}{k}\right)+(n-k)\ln\left(\frac{nq}{n-k}\right) =$$

$$= -(np+x_k\sqrt{npq})\left[\frac{x_k\sqrt{npq}}{np+x_k\sqrt{npq}} + \frac{x_k^2\, npq}{2(np+x_k\sqrt{npq})^2} + O(n^{-\frac{3}{2}})\right]+$$

$$+(nq-x_k\sqrt{npq})\left[\frac{x_k\sqrt{npq}}{nq-x_k\sqrt{npq}} - \frac{x_k^2\, npq}{2(nq-x_k\sqrt{npq})^2} + O(n^{-\frac{3}{2}})\right] =$$

$$= -x_k\sqrt{npq} + x_k\sqrt{npq} - \frac{x_k^2\, npq}{2(np+x_k\sqrt{npq})} - \frac{x_k^2\, npq}{2(nq-x_k\sqrt{npq})} + O(n^{-\frac{1}{2}}) =$$

$$= -\frac{x_k^2\, npq}{2}\left(\frac{1}{np+x_k\sqrt{npq}} + \frac{1}{nq-x_k\sqrt{npq}}\right) + O(n^{-\frac{1}{2}}) .$$

Suluavaldist teisendades saame:

$$U_n = \frac{1}{np+x_k\sqrt{npq}} + \frac{1}{nq-x_k\sqrt{npq}} = \frac{np+x_k\sqrt{npq}+nq-x_k\sqrt{npq}}{n^2pq+n\sqrt{npq}\,x_k\,(q-p)-x_k^2npq} =$$

$$= \frac{1}{npq+x_k(q-p)\sqrt{npq}-x_k^2pq} .$$

Jääb veel üle näidata, et $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{npq}{U_n} = 1$.

Selleks leiame: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{npq} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[1 + \frac{x_k(q-p)}{\sqrt{npq}} - \frac{x_k^2}{n}\right] = 1$

alati, kui on täidetud tingimus (3); järelikult ka $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{npq}{U_n} = 1$.

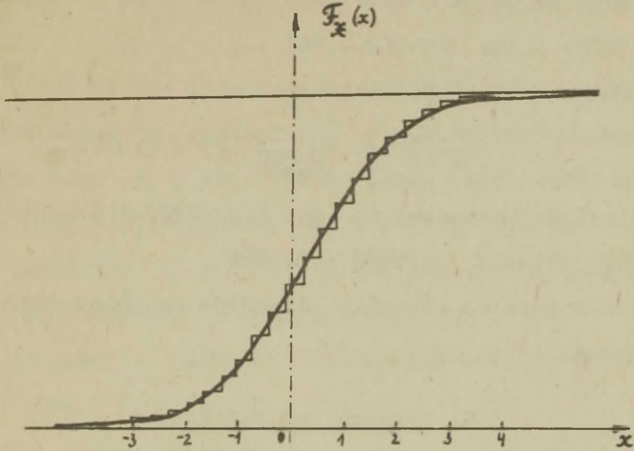
Seega ongi tõestatud seos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}}{e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x_k^2}{2}\cdot W_n + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}}{e^{-\frac{x_k^2}{2}}} = 1 ,$$

ning võrdus (2), järelikult aga ka (1) on tõestatud.

3. Piirteoreemid.

Äsjatõestatud teoreem on üheks lihtsamaks esindajaks arvukate piirteoreemide peres, mis kõik vaatlevad juhuslike suuruste jada piirväärtust kui juhuslikku suurust. Selliseid piirteoreeme, mis, nagu käesolevgi, käsitlevad piirsuuruse tõenäosuse tihedust, nimetatakse lokaalseteks piirteoreemideks (vt. joonis 54); niisuguseid piirteoreeme aga, mille sisuks on mingi väide juhuslike suuruste jada piirsuuruse jaotusfunktsiooni kohta, nimetatakse integraalseteks piirteoreemideks (vt. joonis 55).



Joon. 55. Normeeritud ja tsentreeritud binomiaaljaotusega ($p = 1/2, n=50$) juhusliku suuruse ning normaaljaotusega ($m = 0, \sigma = 1$) juhusliku suuruse jaotusfunktsioonid.

4. Normaaljaotuse kasutamine binomiaaljaotuse lähendamisel.

Vaatleme järgmist ülesannet:

Münti visatakse 400 korda. Kui suur on tõenäosus selleks, et vapipool tuleks peale rohkem kui 220 korda?

Lahendus. Ilmselt on vapipoole esinemise arvu jaotuseks binomiaaljaotus parameetritega $p = 0,5$, $n = 400$, seega täpne vastus oleks

$$p = \sum_{k=221}^{400} C_{400}^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{400} .$$

Et hoiduda liiga tülikatest arvutustest, lähendame binomiaaljaotuse normaaljaotusega, valides viimasele <u>samad parameetrid</u>. (Miks? - Tuletada põhjendus piirteoreemist!) Seega tuleb meil leida $m = np = 200$; $\sigma = \sqrt{npq} = 10$. Tuleb leida $F_X(220)$, kus $X \sim N(200,10)$.

Kuid valemi (7,9) kohaselt

$$F_X(220) = F_{\frac{X-200}{10}}(2) = 0,9772 .$$

Meie ülesande vastuseks on aga $P(X \geqslant 220) = 1 - P(X < 220) = 1 - F_X(220) = 1 - 0,9772 = 0,0228$.

Sel viisil on võimalik lahendada paljusid sarnaseid ülesandeid.

5. Poissoni piirteoreem.

Moivre-Laplace'i teoreemi tõestamisel vajalikke piirprotsesse jälgides on lihtne märgata, et binomiaaljaotus koondub kõige kiiremini normaaljaotuseks sel juhul, kui $p = \frac{1}{2}$, ning koondumine on seda aeglasem, mida suurem on vahe $\left|p - \frac{1}{2}\right|$. Siit tekib praktiline probleem - võib-olla leidub mõni teine parem asümptootiline valem binomiaaljaotuse lähendamiseks eriti väikeste ja eriti suurte p väärtuste korral, s. o. juhul, kui koondumine normaaljaotuseks on väga aeglane (ja selleks, et saada mingil määral rahuldavat lähendit, tuleks valida n küllalt suur).

Asümptootilise valemi niisuguste juhuslike suuruste jaotuse leidmiseks andis Poisson, kes lähtus järgmistest eeldustest:

Olgu katseseeriate jada:

$$E_{11},$$
$$E_{21}, E_{22},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$E_{n1}, E_{n2}, \ldots, E_{nn},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(igas reas on üks katseseeria) selline, et igas seerias on katsed sõltumatud ja sündmuse A esinemise tõenäosus i-ndas seerias olgu p_i, mis sõltub üksnes seeria numbrist i, mitte katse numbrist seerias j, ning olgu $Y_i = \sum_{j=1}^{i} X_{ij}$, s. o. sündmuse A esinemiste arv kogu i-nda seeria vältel. Neil eeldustel kehtib Poissoni teoreem.

Teoreem 2. Olgu Y_n binomiaaljaotusega juhuslike suuruste jada, $Y_n \sim B(p_n, n)$, $(n=1,2,\ldots)$.

Kui $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = a$,

siis $$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \qquad (4)$$

Seega väidab Poissoni teoreem, et toodud eeldustel on binomiaaljaotusega juhuslike suuruste jada piirväärtuseks Poissoni jaotusega juhuslik suurus.

Tõestus.

Kasutades binomiaaljaotust, saame:

$$P\{Y_n = m\} = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \left[\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{1}{n^m}\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}\right].$$

Et

$$\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{1}{n^m}\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} = \frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-m+1)}{n}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^m} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^m}$$

ning

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{m-1}{n})}{(1-\frac{a}{n})^m} = 1$$ iga fikseeritud a ja m korral, ja

$$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{a}{n})^n = e^{-a},$$

siis on sellega teoreem tõestatud.

6. Tšebõšovi võrratus.

Vaatleme juhuslikku suurust X, mille kohta eeldame, et tal eksisteerib keskväärtus EX ja dispersioon $DX < \infty$.

Tšebõšovi võrratus annab hinnangu juhusliku suuruse X keskväärtusest kõrvalekaldumise tõenäosustele:

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (5)$$

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus X on diskreetne juhuslik suurus. Avaldame X dispersiooni kahe liidetava summana:

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^2 p_i = \sum_{|x_i-EX|\geq\varepsilon} |x_i-EX|^2 p_i + \sum_{|x_i-EX|<\varepsilon} |x_i-EX|^2 p_i.$$

Mõlemad liidetavad on mittenegatiivsed. Ühte neist ära jättes võib avaldis ainult väheneda, seega:

$$DX \geq \sum_{|x_i-EX|\geq\varepsilon} (x_i-EX)^2 p_i \geq \varepsilon^2 \sum_{|x_i-EX|\geq\varepsilon} p_i = \varepsilon^2 P|X - EX| \geq \varepsilon,$$

kuna $\varepsilon^2 \leq |x_i-EX|^2$, siis meie avaldis ainult väheneb, kui asendame kõik liidetavad suurusega ε^2; summeeritavate tõenäosuste summa annabki tõenäosuse selleks, et $|X-EX| \geq \varepsilon$, s.o. võrratuses (5) vasakul asetseva tõenäosuse. Võrratus on tõestatud.

7. Bernoulli suurte arvude seadus.

Teoreem 3. Vaatleme mingit katset, mille üks võimalik tulemus on sündmus A, $P(A) = p$; sooritatagu seda katset n korda järjest, kusjuures eeldame, et katsetulemused on sõltumatud.

Olgu sündmuse A esinemise suhteline sagedus $\frac{k_n}{n}$.

Neil eeldustel leidub vastavalt igale etteantud arvude ε ja δ paarile naturaalarv $N(\varepsilon, \delta)$ nii, et

$$P\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) < \delta,$$

kui $n > N(\varepsilon, \delta)$.

Tõestus: Vaatleme binomiaaljaotusega juhuslikku suurust $X \sim N(n,p)$. Siis $X = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = k_n$; valemite (7.3) ja (7.4) põhjal $EX = np$, $DX = npq$.

Olgu $Y = \frac{X}{n}$; siis $EY = p$, $DY = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n}$ (rakendame siin keskväärtuse ja dispersiooni omadusi).

Kasutame nüüd juhusliku suuruse Y jaoks Tšebõšovi võrratust:

$$P(|Y - EY| \geq \varepsilon) \leq \frac{DY}{\varepsilon^2};$$

asendades EY ja DY nende konkreetsete väärtustega meie juhusliku suuruse Y jaoks, saame:

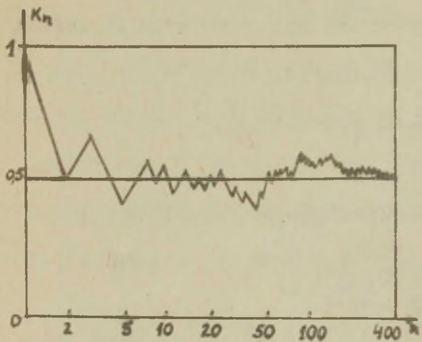
$$P\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Tõepoolest, olgu antud ε ja δ, siis tuleb meil valida $N(\varepsilon, \delta)$ nii suur, et $\frac{pq}{n\varepsilon^2} < \delta$ kui $n > N(\varepsilon, \delta)$, s. t. $N > \frac{pq}{\delta\varepsilon^2}$. Teoreem on tõestatud.

Seega näeme, et pikas katseseerias läheneb sündmuse suhteline sagedus selle sündmuse tõenäosusele. See väide kannabki Bernoulli suurte arvude seaduse nime.

Joonis 56 illustreerib Bernoulli suurte arvude seadust mündi viskamisel; siin kujutatakse vapipoole esinemise (s. o. sündmuse $A, p(A) = \frac{1}{2}$) suhtelise sageduse $\frac{k_n}{n}$ muutumist sõltuvalt n muutumisest.

Siit tuleneb ka loogiline alus statistilise tõenäosuse rakendamisele: kuna kõigil sündmustel, millel tõenäosus eksisteerib, on see sõltumatute katsete jada suhteliste sageduste piirväärtusteks, on loomulik omistada ka neile sündmustele, millel eksisteerib suhteliste sageduste jada piirväärtus, kuid pole defineeritud tõenäosust, tõenäosus võrdsena piirväärtusega.



Joon. 56.

8. Ülesandeid.

1. Tõestada Moivre-Laplace'i teoreemiga sarnane teoreem, kasutades binomiaaljaotuse asemel trinomiaaljaotust (s. t. katsel on kolm võimalikku tulemust A_1, A_2, A_3 vastavalt tõenäosustega $p(A_i) = p_i$.

2. Tõestada Bernoulli teoreem, kasutades Moivre-Laplace'i teoreemi.

3. Tõestada iseseisvalt võrratus (5) pideva juhusliku suuruse X jaoks, eeldusel, et eksisteerib $f_X(x)$.

———— + ————

1. Suurte arvude seaduse katselisel kontrollil saadi järgnevad tulemused:

Visete arv	Vapi esinemiste arv	Vapi esinemiste suhteline sagedus
Buffon: 4040	2048	0,5080
Pearson 12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Kelle tulemus oli kõige parem (s. t., nii suur või suurem kõrvalekalle keskväärtusest esineb suurima tõenäosusega)?

2. Mingi sündmuse tõenäosus määratakse Monte-Carlo meetodil. Leida vajalik katsete arv, et saada tõenäosusega $p \geqslant 0,99$ otsitav tõenäosus veaga, mis on $\leqslant 0,01$.

3. Sündmuse esinemise tõenäosus on 0,6. Kui suur on tõenäosus selleks, et 60 katse vältel esineks sündmus rohkem kui 30 korda?

4. Leida tõenäosus selleks, et valimisjaoskonnas esimese 100 valija hulgas oleks 75 või rohkem meest; alla 40 mehe (lugedes mehe ja naise esinemise võrdtõenäoseks).

5. Täringut visati 1000 korda. Kui suur tõenäosus on saada alla 300 korra 3 või 6? Milline on arvude 3 või 6 esinemise vahemik tõenäosusega 0,95?

6. Täringut visati 1000 korda. Leida sümmeetrilised piirid, mille vahel asub tulemuse "6" esinemise arv tõenäosusega 0,85.

7. Sündmuse ühekordse esinemise tõenäosus on 0,3. Kui suure tõenäosusega võib kinnitada, et 100 katse tulemusena saadud sündmuse esinemise suhteline sagedus on 0,2 ja 0,4 vahel? Mis on tõenäosem, kas sagedus 0,2 või 0,4?

8. Mitu katset on vaja selleks, et tõenäosusega 0,9 ei erineks sagedus tõenäosusest (mille väärtus on 0,4) rohkem kui 0,1 võrra?

9. Poisi sündimise tõenäosus on 0,516. Kui suur on tõenäosus selleks, et 10000 vastsündinu hulgas pole poisse rohkem kui tütarlapsi?

10. Ravimit vererõhu alandamiseks rakendati 100-le patsiendile. Osutus, et 68-l vererõhk alanes, 32-l aga tõusis. Kui suur on tõenäosus selleks, et ravim mõjus (tegemist ei ole juhuslike muudatustega).

11. Kaks poissi viskavad kordamööda münti. Üks saab 8 korda 10 viskest vapi, teine süüdistab teda mündi võltsimises. Mängu jätkatakse. 100 viskest on vapp saadud 65 korral. Teine jääb oma süüdistuse juurde. Millal on õigus süüdistamiseks suurem, kas pärast esimest või teist viskevooru?

12. Teatris on 1000 kohta. Teatril on kaks sissepääsu, kummagi juures on garderoob. Kui palju kohti peaks olema kummaski garderoobis selleks, et kõik teatrisse tulijad 99 juhul 100-st võiksid riided ära anda garderoobis selle ukse juures, kust nad teatrisse tulid? (Oletame, et iga tulija tuleb tõenäosusega $\frac{1}{2}$ kummastki uksest.)

13. Lahendada ülesanne 7 Poissoni jaotuse abil!

§ 9. Markovi ahelad.

1. Sõltuvate katsete jadad.

Vaatleme katset, millel on k võimalikku tulemust

$$A_1, A_2, \ldots, A_k .$$

Teostame seeria katseid, kusjuures oletame, et katsetulemuste $A_1, \ldots, A_2$ esinemise tõenäosus i-ndal katsel sõltub sellest, milline tulemus esines (i-1)-sel katsel.

Tinglik tõenäosus tulemuse A_i esinemiseks i-ndal katsel peale teada oleva tulemuse esinemist (i-1)-sel katsel sõltub üksnes (i-1)-se katse tulemusest ning ei muutu täiendava informatsiooni saamisel eelnevate katsete tulemuste kohta.

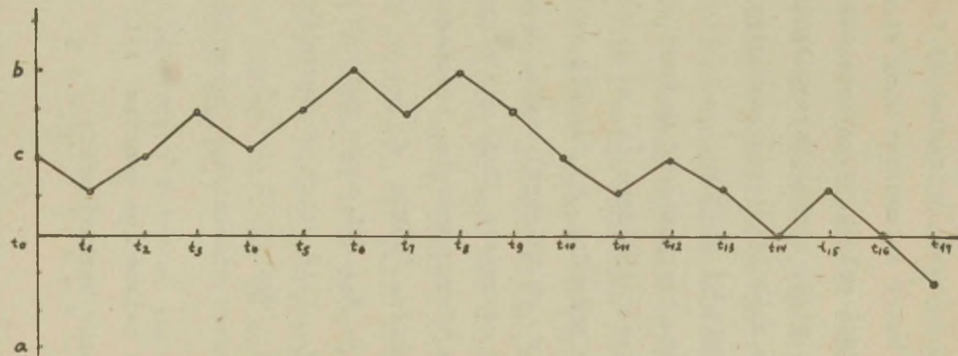
Markovi ahelat, mille korral katsetulemuste esinemise tõenäosused ei sõltu katse järjekorranumbrist i, nimetatakse <u>homogeenseks Markovi ahelaks</u>.

Edaspidi vaatleme homogeenseid Markovi ahelaid.

<u>Näide 1</u>. Vaatleme sirglõiku $[a, b]$ ($a < b$, a ja b on täisarvud). Paiknegu momendil t_0 mingis selle lõigu punktis c ($a < c < b$; c on täisarv) osake. Igal ajamomendil t_i ($i=0,1,2,\ldots$) mõjub osakesele jõud, mis tõukab teda tõenäosusega p ühe ühiku võrra paremale, tõenäosusega $q = 1-p$ - ühe ühiku võrra vasakule. Punkte a ja b loeme peegeldavateks ekraanideks, s. t., kui osake paikneb momendil t_j punktis a, (või b), siis satub ta momendiks t_{j+1} tõenäosusega 1 punkti $a+1$ (vastavalt $b-1$).

Niisugust protsessi nimetatakse juhuslikuks eksklemiseks (vt. joonist 57).

Lugedes osakese paiknemise punktis $a+i$ sündmuseks A_i ($i=0,1,\ldots,b-a$) , saame Markovi ahela.



Joon. 57.

2. Üleminekumaatriks.

Sündmuse A_j esinemist nimetatakse sageli (lähtudes füüsikalisest interpretatsioonist) ka süsteemi paiknemiseks olekus j ; siis sündmuse A_j esinemisele i-ndal katsel järgnevat sündmuse A_l esinemist (i+1)-sel katsel nimetatakse süsteemi üleminekuks olekust j olekusse l . Sündmuse A_l tinglikku tõenäosust tingimusel, et eelmisel katsel esines sündmus A_j , nimetatakse olekust j olekusse l ülemineku tõenäosuseks ning tähistatakse sümboliga p_{jl} .

Selline Markovi ahel on täielikult iseloomustatud tõenäosuste p_{jl} ($j=1,2,\ldots,k$; $l = 1, 2, \ldots, k$) hulgaga, mida tavaliselt esitatakse maatriksina

$$\pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}; \qquad (1)$$

maatriksit π nimetatakse <u>üleminekumaatriksiks</u>.

Ilmselt peavad üleminekumaatriksi elemendid rahuldama järgnevaid tingimusi:

$$1^\circ \quad 0 \leqslant p_{jl} \leqslant 1 ,$$
$$2^\circ \quad \sum_{l=1}^{k} p_{jl} = 1 ; \qquad (2)$$

sest olekust j lähtudes satub süsteem kindlasti mingisse olekusse l , $l = 1,2,\ldots,k$.

<u>Näide 2</u>. Näites 1 kirjeldatud Markovi ahela üleminekumaatriks π on järgmine:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tuletada see üleminekumaatriks!

3. Üleminek n sammu jooksul.

Teades ühest olekust teise ülemineku tõenäosusi, mis on antud maatriksis (1), on võimalik leida ka n sammu jooksul toimuvate üleminekute tõenäosusi.

Tähistame n sammu jooksul olekust j olekusse l ülemineku tõenäosuse sümboliga $p_{jl}(n)$; olgu $m < n$, s. t. et meil on vaja vaadelda süsteemi olekut katsel i , sellele järgneval katsel järjekorranumbriga $i + m$ ning seejärel katsel järjekorranumbriga $i + n$.

Oletame, et süsteem on n sammu vältel läinud olekust j üle olekusse l . Seda võis ta teha, olles katse $i + m$ ajal ükskõik millises olekus $1, 2, \ldots, k$, seega

$$p_{jl}(n) = \sum_{i=1}^{k} p_{ji}(m)\, p_{il}(n-m) . \qquad (3)$$

Tähistame n sammu vältel toimuva üleminekumaatriksi sümboliga $\pi(n)$. Saame siis

$$\pi(n) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \ldots & p_{1k}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \ldots & p_{2k}(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{k1}(n) & p_{k2}(n) & \ldots & p_{kk}(n) \end{pmatrix} ,$$

ning valemist (3) järeldub seos:

$$\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}(m)\,\mathcal{P}(n-m)\ ,$$

aga seega ka

$$\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}^n\ .$$

4. Ergoodiline teoreem.

Teoreem. Olgu mingi $s > 0$ korral üleminekumaatriksi $\mathcal{P}(s)$ kõik elemendid positiivsed.

Siis eksisteerivad sellised konstandid p_j, et

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j\ , \quad i = 1,2,\dots,k\ .$$

Tõestus. Näitame kõigepealt, et eksisteerivad piirväärtused

$$\bar{p}_j = \lim_{n\to\infty}\ \min_{1\leq i\leq k} p_{ij}(n)$$

ja

$$\bar{\bar{p}}_j = \lim_{n\to\infty}\ \max_{1\leq i\leq k} p_{ij}(n)\ .$$

Kasutades seost (3) $m=1$ korral saame:

$$p_{ij}(n) = \sum_{l=1}^{k} p_{il}\, p_{lj}(n-1) \geq \min_{1\leq l\leq k} p_{lj}(n-1) \sum_{l=1}^{k} p_{il} =$$

$$= \min_{1\leq l\leq k} p_{lj}(n-1).$$

Kuna saadud võrratus kehtib iga i korral, siis ka

$$\min_{1\leq l\leq k} p_{lj}(n) \geq \min_{1\leq l\leq k} p_{lj}(n-1)\ .$$

Siit aga järeldubki $\bar{p}_j$ eksisteerimine. (Miks?)
Samuti saame tõestada $\bar{\bar{p}}_j$ eksisteerimise. (Tõestada!)

Nüüd oleks veel tarvis näidata, et

$$\bar{p}_j = \bar{\bar{p}}_j\ . \tag{4}$$

Arvutame kõigepealt vahe $p_{ij}(n) - p_{lj}(n)$, kasutades seost (2) :

$$p_{ij}(n) - p_{lj}(n) = \sum_{r=1}^{k}\left[p_{ir}(s) - p_{lr}(s)\right] p_{rj}(n-s) .$$

Tähistame

$$p_{ir}(s) - p_{lr}(s) = \begin{cases} \beta_{il}(r) , \text{ kui } p_{ir}(s) > p_{lr}(s) , \\ -\beta'_{il}(r) , \text{ kui } p_{ir}(s) \leqslant p_{lr}(s) . \end{cases}$$

Siis

$$\sum_{r=1}^{k} (p_{ir}(s) - p_{lr}(s)) = \sum_{r=1}^{k^\circ}\beta_{il}(r) - \sum_{r=1}^{k'}\beta'_{il}(r) = 0 .$$

Kasutasime siin seost (2); arvutada üksikasjaliselt!

Tähistame

$$\sum_{r=1}^{k^\circ} \beta_{il}(r) = \sum_{r=1}^{k'}\beta'_{il}(r) = h_{il} .$$

Et $p_{ir}(s) > 0$ iga i ja r korral, siis

$$\sum_{r=1}^{k^\circ}\beta_{il}(r) < \sum_{s=1}^{k}\beta_{il}(s) = 1 . \quad \text{(Miks?)}$$

Seega

$$0 \leqslant h_{il} < 1 ,$$

ja samuti ka $h = \max\limits_{1 \leqslant i,l \leqslant k} h_{il}$ rahuldab võrratust

$$0 \leqslant h < 1 . \quad \text{(Miks?)}$$

Seosest (2) lähtudes leiame:

$$\left|p_{ij}(n) - p_{lj}(n)\right| = \left|\sum_{r=1}^{k^\circ}\beta_{il}(r)\, p_{rj}(n-s) - \sum_{r=1}^{k'}\beta'_{il}(r) p_{rj}(n-s)\right| \leqslant$$

$$\leqslant h\left|\max_{1 \leqslant r \leqslant k} p_{rj}(n-s) - \min_{1 \leqslant r \leqslant k} p_{rj}(n-s)\right| \leqslant$$

$$\leqslant h \max_{1 \leqslant i,l \leqslant k}\left|p_{ij}(n-s) - p_{lj}(n-s)\right| .$$

Siis ka

$$\max_{1 \leqslant i,l \leqslant k}\left|p_{ij}(n) - p_{lj}(n)\right| \leqslant h \max_{1 \leqslant i,l \leqslant k}\left|p_{ij}(n-s) - p_{lj}(n-s)\right| .$$

Siit ilmselt järeldub, et

$$\max_{1\leq i,l\leq k} \left| p_{ij}(n+ts) - p_{lj}(n+ts) \right| \leq h^{t+1} \max_{1\leq i,l\leq k} \left| p_{ij}(n-s) - p_{lj}(n-s) \right| \leq h^{t+1} ,$$

sest alati $\left| p_{ij}(n-s) - p_{lj}(n-s) \right| \leq 1$.

Seetõttu

$$\lim_{t\to\infty} \max_{1\leq i,l\leq k} \left| p_{ij}(n+ts) - p_{lj}(n+ts) \right| = 0 .$$

Tähistades $n+ts=n'$, saame ühtlasi

$$\lim_{n'\to\infty} \max_{1\leq i,l\leq k} \left| p_{ij}(n') - p_{lj}(n') \right| = 0 ,$$

seega järeldubki siit (4). (Kuidas?)

Ühtlasi näeme siit, et

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1 ,$$

(miks?) ning meie teoreem on tõestatud.

<u>Näide 3</u>. Vaatleme juhuslikku ekslemist, mis erineb näites 1 defineeritud ahelast vaid sellepoolest, et igasse punkti $a+i$ $(i=0,2,\ldots,b-a)$, kus osake paikneb mingil momendil t_j , võib ta positiivse tõenäosusega r $(p+q+r=1)$ jääda paigale ka momendiks t_{j+1} .

5. <u>Ülesandeid</u>.

1. Tuletada näites 1 vaadeldud Markovi ahela jaoks n-sammulise ülemineku maatriksid $\mathcal{T}(n)$ $(n=2;\ n=2k;\ n=2k+1,\ k>\frac{b-a}{2})$.

2. Kas näites 1 defineeritud Markovi protsessi korral kehtib ergoodiline teoreem? Miks?

3. Tuletada üleminekumaatriks näites 3 vaadeldud juhuks, pidades silmas, et a ja b säilitavad oma peegeldavad omadused (kui osake ei jää neisse punktidesse paigale, liigub ta ainult vahemiku sissepoole!).

Kas sellise protsessi korral kehtib ergoodiline teoreem?

II. MÕNINGAID MÕISTEID MÕÕDUTEOORIAST.

§ 1. Hulkade mõõtuvus.

1. Hulk ja klass.

Vaatleme mingit mittetühja hulka Ω, mida nimetame ruumiks. Selle hulga elemente ω (indeksitega või ilma) nimetame ruumi Ω punktideks.

Meie uurimisobjektiks on ruumi Ω hulgad (s. t., hulga Ω alamhulgad), mis koosnevad punktidest ω. Hulki tähistatakse tavaliselt tähtedega $A, B, C, \ldots$ (ka indeksitega: $A_1, A_2, A^{(1)}, A^{(2)}, A_i, A_\alpha$). Muuhulgas vaatleme ka hulki $\{\omega\}$ - ühest ainsast punktist ω koosnevat hulka, samuti tühja hulka $\emptyset$, mis ei sisalda ainsatki punkti. Ka ruum Ω ise on üks uuritavatest hulkadest.

Hulkade hulki nimetatakse klassideks. Klasse tähistame tähtedega $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}_\alpha, \ldots$. Kui kõik klassi $\mathcal{A}$ kuuluvad hulgad kuuluvad ruumi Ω , ütleme, et klass $\mathcal{A}$ on defineeritud ruumis Ω . Sageli on otstarbekas defineerida hulkade klass teatud reaalarvude hulga T , nn. <u>indeksite</u> hulga abil.

Olgu T mingi lõplik, loenduv või mitteloenduv reaalarvude hulk. Nimetame seda hulka <u>indeksite hulgaks</u>. Olgu igale indeksile $t \in T$ seatud vastavusse mingi hulk $A_t \in \Omega$. Klass $\{A_t : t \in T\}$ on siis <u>indeksite hulgal T defineeritud klass</u>. Kui indeksite hulgaks T on naturaalarvude jada $\{1,2,\ldots\} = N$, siis nimetatakse hulgal N defineeritud klassi $\{A_n : n \in N\} = \{A_n\}$ <u>hulkade jadaks</u>.[2] Seega jada on lõpmatu järjestatud hulkade klass.

Hulkade klasside jaoks defineeritakse sisalduvusseosed ja hulgateoreetilised operatsioonid tavalises tähenduses, mõistes vaid hulgaelementide all ruumi Ω hulki $A, B, \ldots$ jne. Nii tähendab seos $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, et iga hulk $A \in \mathcal{A}$ kuulub ka klassi $\mathcal{B}$. Klasse $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ loetakse võrdseiks (tähistatakse $\mathcal{A} = \mathcal{B}$) parajasti siis, kui on õiged mõlemad seosed: $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ja $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Hulkade klasside ühisosa ja summa (ühend) defineeritakse seostega:

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{A: \ A \in \mathcal{A} \text{ ja } A \in \mathcal{B}\},$$
$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{A: \ A \in \mathcal{A} \text{ või } A \in \mathcal{B} \text{ või } A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}\}.$$

---

[2] Jada korral loobume sageli traditsiooniliselt ka sulgudest ning tähistame jada $\{A_n\}$ lihtsalt A_n , seega samuti kui jada üldliiget.

Näide 1. Olgu A mingi meelevaldne hulk ruumist Ω. Lihtsa hulkade klassi $\mathcal{K}_A$ saame defineerida järgnevalt:

$$\mathcal{K}_A = \{A, \bar{A}, \Omega, \emptyset\} \qquad (\bar{A} = \Omega \setminus A).$$

Näide 2. Igale ruumile Ω vastab selle ruumi kõigi hulkade (hulga kõigi alamhulkade) klass $\mathcal{D}_\Omega$. Ilmselt kuulub hulka $\mathcal{D}_\Omega$ ruumi Ω iga hulkade klass $\mathcal{K}$. (Tõestada!)

Näide 3. Olgu ruumiks Ω arvsirge R. Seame igale reaalarvule β vastavusse hulga $A_\beta = [\beta, \beta+1)$ ruumis R. Vastavalt mingile indeksite hulgale T saame hulkade klassi $\{A_\beta : \beta \in T\}$. Jadaks A_n osutub vaadeldaval juhul poollõikude $[n, n+1)$ hulk.

Näide 4. Olgu ruumiks Ω kõigi lõigul $[a,b]$ pidevate funktsioonide hulk $C_{[a,b]}$. Hulgad ruumis Ω võime defineerida näiteks järgnevalt:

$$A_d = \{f(x) : f(x) \in C_{[a,b]},\ f(d) = 0\}.$$

Valides indeksite hulgaks T lõigu $[a_1, b_1]$, $a \leq a_1 < b_1 \leq b$, saame määratleda hulkade klassi

$$\{A_d : d \in [a_1, b_1]\}.$$

2. Hulkade jada koonduvus.

Olgu meil antud ruum Ω, ja olgu T meelevaldne indeksite hulk, millele on seatud vastavusse hulkade klass $\{A_t : t \in T\} = \mathcal{K}$.

Klassi $\mathcal{K}$ elementide ülemiseks rajaks $\sup\limits_{t \in T} A_t$ nimetatakse kõigi punktide hulka, mis kuuluvad vähemalt ühte hulkadest A_t, s. t.

$$\sup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} A_t .$$

Klassi $\mathcal{K}$ elementide <u>alumiseks rajaks</u> $\inf_{t \in T} A_t$ nimetatakse kõigi punktide hulka, mis kuuluvad üheaegselt kõigisse hulkadesse A_t, s. t.

$$\inf_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} A_t .$$

On lihtne näha, et kui leidub kaks ühisosata hulka A_{t_1} ja A_{t_2}, $A_{t_1} \cap A_{t_2} = \emptyset$, $t_1, t_2 \in T$, siis on ka

$$\inf_{t \in T} A_t = \emptyset .$$

(Tõestada!)

Hulkade jada jaoks saame defineerida ka alumise ja ülemise kuhjumishulga. Deskriptiivne (s. o. kirjeldav) definitsioon oleks järgmine:

Niisuguste punktide hulka, mis kuuluvad kõigisse hulkadesse A_n, välja arvatud ülimalt lõplik arv hulki, nimetatakse jada A_n alumiseks kuhjumishulgaks $\underline{\lim} A_n$ ($= \lim\limits_{n \to \infty} \inf A_n$).

Konstruktiivselt on see definitsioon väljendatav kujul:

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j . \qquad (1)$$

Tõepoolest, $\bigcap\limits_{j=k}^{\infty} A_j$ on selliste punktide hulk, mis kuuluvad kõikidesse hulkadesse A_n, välja arvatud lõplik arv hulki $A_1, \ldots, A_{k-1}$; paneme tähele, et kui $k_1 < k_2$, siis

$$\bigcap_{j=k_1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{j=k_2}^{\infty} A_k .$$

Kõigi hulkade $\bigcap\limits_{j=k}^{\infty} A_j$ summa annabki kõigi selliste punktide hulga, mis ei kuulu ainult ülimalt lõplikku arvu hulkadest A_n.

Kõigi selliste punktide hulka, mis kuuluvad lõpmata paljudesse hulkadesse A_n, nimetatakse jada A_n <u>ülemiseks kuhjumishulgaks</u> ning tähistatakse sümboliga $\overline{\lim} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Konstruktiivselt saaksime selle definitsiooni esitada järgnevalt:

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j . \qquad (2)$$

(Tõestada!)

Ilmselt kehtivad seosed:

$$\inf A_n \subset \underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n \subset \sup_n A_n . \qquad (3)$$

(Tõestada!)

Olgu märgitud, et ülalesitatud deskriptiivsed definitsioonid on rakendatavad ka mistahes lõpmatu hulkade klassi alumise ja ülemise kuhjumishulga määratlemiseks. (Miks?)

Kuhjumishulkade abil defineeritakse ka hulkade jada <u>koonduvus</u>.

Hulkade jada A_n nimetatakse koonduvaks, kui kehtib võrdus:

$$\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = A .$$

Kuhjumishulkade ühist väärtust A nimetatakse jada A_n piirväärtuseks $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim A_n$. Jada A_n koonduvust piirväärtuseks A tähistatakse sümboliga $\rightarrow$, niisiis võime kirjutada:

$$A_n \rightarrow A .$$

Jada A_n nimetatakse <u>mittekahanevaks</u>, kui

$$A_j \subset A_{j+1} \quad (j=1,2,\ldots) .$$

Mittekahanevat jada nimetatakse <u>kasvavaks</u>, kui iga j korral $(j=1,2,\ldots)$ kehtib võrratus:

$$A_j \neq A_{j+1}.$$

Jada A_n nimetatakse mittekasvavaks, kui

$$A_j \supset A_{j+1} \quad (j=1,2,\ldots).$$

Kui iga j korral $A_j \neq A_{j+1}$, nimetatakse mittekasvavat jada kahanevaks. Mittekahanevaid ja mittekasvavaid jadasid nimetatakse monotoonseteks.

Kui mittekahanev jada A_n koondub piirväärtuseks A, tähistame seda sümboolselt: $A_n \nearrow A$. Mittekasvava jada koonduvust märgime: $A_n \searrow A$.

Teoreem 1. Hulkade monotoonne jada on koonduv.

Tõestus: Vaatleme hulkade mittekahanevat jada A_n,

$$A_j \subset A_{j+1} \quad (j=1,2,\ldots).$$

Meil on tarvis tõestada võrdus

$$\overline{\lim}\, A_n = \underline{\lim}\, A_n.$$

Kasutades valemit (2) arvutame $\overline{\lim}\, A_n$.

Et $A_j \subset A_{j+1}$, siis iga k korral $\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \subset A_k$, järelikult ka $\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, ja $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$. Seega

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Võrdsete hulkade ühisosa võrdub aga hulga enesega, seetõttu saame:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Teiselt poolt, valemi (1) põhjal kehtib seos

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

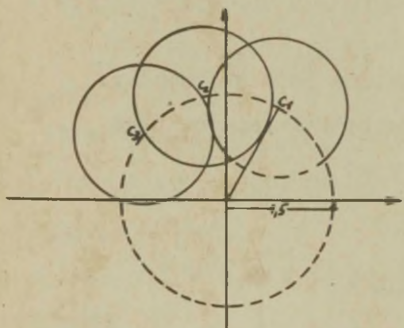
sest

$$\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = A_k$$

ning vajalik võrdus ongi tõestatud.

Mittekasvava jada korral on teoreemi tõestus põhimõtteliselt analoogiline. (Tõestada iseseisvalt!)

Näide 5. Hulk A_n on ring raadiusega 1, mille keskpunkt C_n on määratud (polaarkoordinaatides) polaarraadiusega 1,5 ja polaarnurgaga $\varphi = n$ (vt. joonis 58).



Joon. 58.

Sel juhul

$$\underline{\lim}\, A_n = \emptyset ,$$

$$\overline{\lim}\, A_n =$$
$$= \left\{(x,y) : 0{,}5 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2{,}5\right\}$$

(Tõestada!)

Näeme, et jada A_n ei koondu. (Miks?)

Näide 6. Vaatleme hulkade klassi $\mathcal{K}_A$ (vt. näide 1). Siis

$$\sup_{A \in \mathcal{K}_A} A = \Omega \ ; \quad \inf_{A \in \mathcal{K}_A} A = \emptyset \ ;$$

$\overline{\lim}\, A$ ja $\underline{\lim}\, A$ ei eksisteeri. (Miks?)

Näide 7. Vaatleme hulkade klassi $\mathcal{D}_\Omega$ (näide 2). Näeme, et

$$\sup_{A \in \mathcal{D}_\Omega} A = \Omega \ ; \quad \inf_{A \in \mathcal{D}_\Omega} A = \emptyset \ .$$

a) Kui Ω sisaldab lõpliku hulga elemente, siis ka $\mathcal{D}_\Omega$ sisaldab lõpliku hulga hulki ja $\overline{\lim}\, A$ ning $\underline{\lim}\, A$ ei eksisteeri.

b) Kui Ω sisaldab lõpmatu hulga elemente, siis $\mathcal{D}_\Omega$ on mitteloenduv ning pole seega jadana järjestatav. Vaadeldaval juhul ei saa konstruktiivseid definitsioone $\underline{\lim}\, A$ ja $\overline{\lim}\, A$ määramiseks rakendada, kuid kasutades deskriptiivseid definitsioone, võime veenduda, et

$$\underline{\lim}_{A \in \mathcal{D}_\Omega} A = \emptyset \ ; \qquad \overline{\lim}_{A \in \mathcal{D}_\Omega} A = \Omega \ .$$

(Tõestada!)

Näide 8. Vaatleme hulki A_n, mis on defineeritud näites 3. Näeme, et

$$\sup A_n = [1, \infty) \ ,$$
$$\inf A_n = \underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \emptyset \ .$$

Seega jada A_n koondub ja $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \emptyset$.

3. Kinnised hulkade klassid.

Olgu meil antud ruum Ω, mis sisaldab hulki $A, B, \ldots$. Vaatleme mingit ruumis Ω defineeritud tehet (operatsiooni) $\mathcal{f}$, mis seab hulkadele $A, B, \ldots$ vastavusse hulga $\mathcal{f}(A, B, \ldots) = S, S \in \Omega$. Erijuhul võib tehe $\mathcal{f}$ olla defineeritud ka lõpliku hulga hulkade jaoks, s. t., ta seab lõplikule hulgale hulkadele $A_1, \ldots, A_n$ vastavusse mingi hulga $\mathcal{f}(A_1, \ldots, A_n) = S$; on ka tehteid (näiteks hulga täiendi leidmine), mis seavad ühele ainsale hulgale vastavusse mingi teise hulga: $\mathcal{f}(A) = S$.

Hulkade klassi $\mathcal{K}$ nimetatakse tehte $\mathcal{f}$ suhtes kinniseks, kui see tehe seab klassi $\mathcal{K}$ kuuluvatele mistahes hulkadele alati vastavusse klassi $\mathcal{K}$ kuuluva hulga, s. t., alati, kui

$$A, B, \ldots \in \mathcal{K} \ ,$$

siis ka

$$S = \mathcal{S}(A,B,\ldots) \in \mathcal{K}.$$

Osutub, et klass $\mathcal{D}_\Omega$ on iga hulgateoreetilise tehte suhtes kinnine. (Miks?)

Teoreem 2. Olgu $\mathcal{A}_t$, $t \in T$ tehte $\mathcal{S}$ suhtes kinnised klassid. Siis on ka nende ühisosa $\mathcal{C} = \bigcap_{t\in T} \mathcal{A}_t$ selle tehte suhtes kinnine.

Tõestus: Valime suvalised elemendid $A,B,\ldots$ klassist $\mathcal{C}$ ning rakendame neile tehet $\mathcal{S}$; saame hulga

$$S = \mathcal{S}(A,B,\ldots)\,.$$

Kuna $A,B,\ldots \in \mathcal{C} \subset \mathcal{A}_t$ iga $t \in T$ korral ning kõik klassid $\mathcal{A}_t$ on tehte $\mathcal{S}$ suhtes kinnised, siis ka $S \in \mathcal{A}_t$, $t \in T$ ning seega tõepoolest $S \in \bigcap_{t\in T} \mathcal{A}_t$, mida oligi tarvis tõestada.

Olgu meil antud ruumi Ω mingi hulkade klass $\mathcal{K}$ ja mingi tehe $\mathcal{S}$ selles ruumis Ω. Üldiselt ei ole $\mathcal{K}$ kinnine tehte $\mathcal{S}$ suhtes. Sel juhul võiksime leida ruumis Ω mingi hulkade klassi $\mathcal{M} \supset \mathcal{K}$, mis oleks tehte $\mathcal{S}$ suhtes kinnine. Nimetame minimaalseks klassi $\mathcal{K}$ sisaldavaks tehte $\mathcal{S}$ suhtes kinniseks hulkade klassiks $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ sellist ruumi Ω hulkade klassi $\mathcal{M}$, mis sisaldab hulkade klassi $\mathcal{K}$, on tehte $\mathcal{S}$ suhtes kinnine ning sisaldub igas teises nende omadustega hulkade klassis. Sellist klassi $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ nimetatakse ka hulkade klassi $\mathcal{K}$ poolt indutseeritud minimaalseks $\mathcal{S}$-kinniseks hulkade klassiks.

Teoreem 3. Iga ruumi Ω, selle ruumi hulkade klassi ja tehte $\mathcal{S}$ korral leidub minimaalne klassi $\mathcal{K}$ poolt indutseeritud $\mathcal{S}$-kinnine hulkade klass $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$.

<u>Tõestus</u>. Alati leidub vähemalt üks ruumi Ω hulkade klass $\mathfrak{M} = \mathcal{D}_{\Omega}$ nii, et $\mathfrak{M}$ on tehte $\mathcal{S}$ suhtes kinnine ja $\mathfrak{M} \supset \mathcal{K}$.

Olgu kõigi tehte $\mathcal{S}$ suhtes kinniste klassi $\mathcal{K}$ sisaldavate klasside hulk $\{\mathfrak{M}_t : t \in T\}$.

Defineerime $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) = \bigcap\limits_{t \in T} \mathfrak{M}_t$.

Vahetult on näha, et

1) $\mathcal{K} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{K})$,

2) $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ on teoreemi 2 põhjal kinnine $\mathcal{S}$ suhtes,

3) $\mathfrak{M}_t \supset \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ iga $t \in T$ puhul.

Teoreem on sellega tõestatud.

Hulgateoreetilise summa ja vahe[3] suhtes kinnist hulkade klassi nimetatakse <u>ringiks</u>. Iga ring sisaldab ka tühihulka. (Tõestada!) Seevastu kogu ruum Ω ei tarvitse ringi kuuluda.

Ringi, mis sisaldab ka kogu ruumi Ω, nimetatakse <u>algebraks</u>. Algebra võime defineerida ka summa ja täiendi suhtes kinnise klassina. Osutub, et algebra $\mathcal{A}$ jaoks on samaväärsed definitsioonid:

$$\begin{cases} 1^\circ & \text{kui } A,B \in \mathcal{A}, \text{ siis ka } A \cup B \in \mathcal{A}; \\ 2^\circ & \text{kui } A \in \mathcal{A}, \text{ siis ka } \bar{A} \in \mathcal{A}; \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} 1' & \text{kui } A,B \in \mathcal{A}, \text{ siis ka } A \cup B \in \mathcal{A}; \\ 2' & \text{kui } A,B \in \mathcal{A}, \text{ siis ka } A \setminus B \in \mathcal{A}; \\ 3' & \Omega \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

(Tõestada definitsioonide samaväärsus!)

---

[3] Kõneldes hulkadest kasutame edaspidi lihtsuse mõttes ka sõnu "summa", "vahe" ja "korrutis", mõistes nende all hulgateoreetilist summat (e. ühendit), hulgateoreetilist vahet ja ühisosa.

Kasutades hulgateoreetiliste tehete vahelisi seoseid on lihtne tõestada, et algebra on kinnine ka kahe hulga ühisosa, lõpliku arvu hulkade summa ja lõpliku arvu hulkade vahe leidmise tehete suhtes.[4] (Tõestada!) Loenduva summa suhtes ei ole aga üldiselt ei ring ega ka algebra kinnine.

Algebrat, mis on kinnine ka loenduva summa suhtes, nimetatakse σ-algebraks (loe: sigma-algebra); σ-algebra $\mathcal{C}$ vahetuks defineerimiseks kasutame algebra definitsiooni, kus vaid nõude 1° (või 1') asendame rangemaga:

1°) kui $A_i \in \mathcal{C}$, $i=1,2,\ldots$, siis ka

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C} .$$

Osutub, et σ-algebra on kinnine ka loenduva ühendi suhtes. (Tõestada!)

Hulkade klassi $\mathcal{L}$, mis sisaldab koos iga monotoonse jadaga ka viimase piirväärtust, nimetatakse <u>monotoonseks klassiks</u>.

Olgu meil antud hulkade klass $\mathcal{K}$. Siis võime (teoreemi 3 põhjal) alati leida selle klassi $\mathcal{K}$ poolt indutseeritud minimaalse algebra $\mathcal{A}(\mathcal{K})$, klassi $\mathcal{K}$ poolt indutseeritud minimaalse σ-algebra $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ ja klassi $\mathcal{K}$ poolt indutseeritud minimaalse monotoonse klassi $\mathcal{L}(\mathcal{K})$.

Vaatleme, millised on klasside $\mathcal{A}(\mathcal{K})$, $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ ja $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ vahekorrad.

---

[4] Edaspidi ütleme lihtsalt "lõplik summa" või "loenduv summa" (vastavalt "ühisosa"), mõistes selle all lõpliku (vastavalt loenduva) hulga hulkade summat (ühisosa).

Algebra ja σ-algebra definitsioonidest järeldub vahetult, et

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{K}) .$$

(Tõestada!)

Ülejäänud seoste leidmiseks on kasulik järgnev teoreem:

Teoreem 4. Iga monotoonne algebra on σ-algebra.

Tõestus. Selleks, et algebra $\mathcal{A}$ oleks σ-algebra, tuleb näidata, et alati, kui

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A},$$

kehtib seos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} .$$

Defineerime hulgad:

$$B_1 = A_1 ,$$

$$B_2 = A_1 \cup A_2 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{i} A_j \quad (i=1,2,\ldots) .$$

Siis ilmselt $B_i \subset B_{i+1}$ $(i=1,2,\ldots)$, s. t. jada B_i on monotoonne ning seega koonduv; teoreemi 1 põhjal eksisteerib $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

Meie definitsiooni kohaselt aga $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Kuna eelduse kohaselt klass $\mathcal{A}$ on monotoonne, siis ka

$$\lim_{n\to\infty} B_n \in \mathcal{A},$$

see aga tähendab, et

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} ,$$

mida oligi tarvis näidata.

Osutub, et kehtib ka teoreemi 4 pöördteoreem:

Iga σ-algebra on monotoonne algebra. (Tõestada!) Siit järeldub, et alati

$$\mathcal{C}(\mathcal{K}) \supset \mathcal{L}(\mathcal{K}).$$

(Tõestada!)

Veelgi sisukama tulemuse annab aga järgmine teoreem, mille esitame siin tõestuseta.[5]

Teoreem 5. Klassi $\mathcal{K}$ poolt indutseeritud minimaalne σ-algebra $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ ja minimaalne monotoonne klass $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ ühtivad.

4. Hulkade mõõtuvus.

Olgu meil antud ruum Ω ning olgu defineeritud selle ruumi hulkadest σ-algebra $\mathcal{C}$. Ruumi Ω nimetame siis mõõtuvaks ruumiks ja tähistame sümboliga $(\Omega, \mathcal{C})$.

Ruumi Ω iga hulka, mis kuulub σ-algebrasse $\mathcal{C}$, nimetame (σ-algebra $\mathcal{C}$ suhtes) mõõtuvaks hulgaks.

Olgu märgitud, et üldiselt saab ruumis Ω defineerida mitu erinevat σ-algebrat $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}_\beta$, ... ning vastavalt sellele saame erinevad mõõtuvad ruumid $(\Omega, \mathcal{C}_\alpha)$, $(\Omega, \mathcal{C}_\beta)$, ...

Näide 9. Hulkade klass $\mathcal{K}_A$ (vt. näide 1) on σ-algebra. Mõõtuvaks ruumiks oleks sel juhul $(\Omega, \mathcal{K}_A)$. (Tõestada, kasutades σ-algebra definitsiooni!)

Näide 10. Hulkade klass $\mathcal{D}_\Omega$ on σ-algebra. (Tõestada!) Ruum $(\Omega, \mathcal{D}_\Omega)$ on seega alati mõõtuv.

Näide 11. Olgu ruumiks Ω tasandi R^2 kõigi punkti-

---

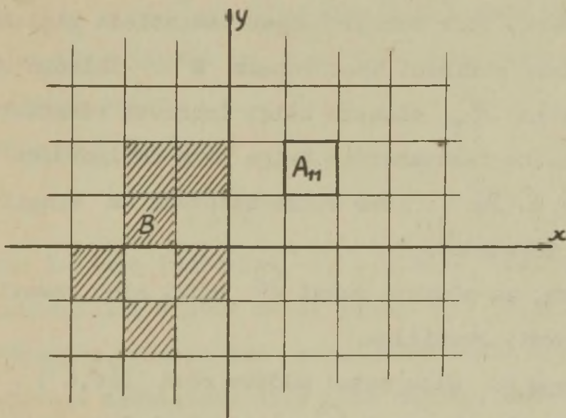
[5] Vt. tõestust kas /2/ lk. 68 või /4/ lk. 73.

de hulk. Määrame siin klassi $\mathcal{K}$ kui kõigi täisarvuliste tippudega poollahtiste ruutude (vt. joonis 59)

$\{(x,y) : n \leq x < n+1, m \leq y < m+1\} = A_{n,m}$ hulga:

$\{A_{n,m} : n,m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Olgu klassi $\mathcal{K}$ poolt indutseeritud minimaalne σ-algebra $\mathcal{C}(\mathcal{K}) = \mathcal{C}$. Vaatleme mõõtuvat ruumi $(\Omega, \mathcal{C})$.



Joon. 59.

$\mathcal{C}$ mõttes mõõtuvateks osutuvad siis kõik loenduvast hulgast täisarvuliste tippudega poollahtistest ruutudest koosnevad hulgad, (vt. näiteks hulk B joonisel 59), kuid ükski ring, kolmnurk jne. ei ole mõõtuv. (Miks?)

Näide 12. Olgu ruumiks Ω arvsirge R . Vaatleme klasse

$\mathcal{K}_1$: sirge kõigi tõkestatud vahemike (a,b) klass;

$\mathcal{K}_2$: sirge kõigi tõkestatud poollõikude $[a,b)$ klass;

$\mathcal{K}_3$: sirge kõigi tõkestatud lõikude $[a,b]$ klass;

$\mathcal{K}_4$: sirge kõigi tõkestatud poollõikude $(a,b]$ klass. Mõõtuvuse defineerime vastavalt σ-algebrate $\mathcal{C}(\mathcal{K}_1)$, $\mathcal{C}(\mathcal{K}_2)$, $\mathcal{C}(\mathcal{K}_3)$ ja $\mathcal{C}(\mathcal{K}_4)$ järgi. Osutub, et

$$\mathcal{C}(\mathcal{K}_1) = \mathcal{C}(\mathcal{K}_2) = \mathcal{C}(\mathcal{K}_3) = \mathcal{C}(\mathcal{K}_4). \quad \text{(Tõestada!)}$$

Sellisel viisil defineeritud mõõtuvaid hulki nimetatakse <u>Boreli mõttes mõõtuvateks hulkadeks</u> e. Boreli hulkadeks sirgel.

Sarnaselt võib Boreli hulgad määratleda mistahes n-dimensionaalses eukleidilises ruumis R^n. Selleks võib valida klassiks $\mathcal{K}_1$ näiteks kõigi lahtiste tõkestatud n-dimensionaalsete risttahukate hulga ning defineerida σ-algebra $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{K}_1)$. (Kas võiks kasutada ka kinnisi risttahukaid? Tõestada!)

Osutub, et mõõtuva ruumi Ω hulki saab samuti käsitleda mõõtuvate ruumidena.

<u>Teoreem 6</u>. Olgu antud mõõtuv ruum $(\Omega, \mathcal{C})$.

Olgu hulk B ruumi Ω mingi alamhulk. Siis moodustab hulkade klass $\{BC : C \in \mathcal{C}\} = \mathcal{B}$ σ-algebra ruumis B.

<u>Tõestus</u>. Arvestades, et $BC \subset B$, näitame, et $\mathcal{B}$ on σ-algebra.

a) Olgu $B_1 \in \mathcal{B}$ ja $B_2 \in \mathcal{B}$; siis peavad leiduma hulgad $A_1 \in \mathcal{C}$ ja $A_2 \in \mathcal{C}$ nii, et $B_1 = BA_1$, $B_2 = BA_2$. Siis $B_1 \setminus B_2 = BA_1 \setminus BA_2 = B(A_1 \setminus A_2) = BA_3 \in \mathcal{B}$, sest $A_3 = A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{C}$, kuna $\mathcal{C}$ on σ-algebra.

b) Olgu $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$; siis leiduvad hulgad $A_1, A_2, \ldots$ nii, et $B_i = BA_i$, $A_i \in \mathcal{C}$. Siis $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} BA_i = B\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = BA \in \mathcal{C}$, sest $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$.

c) $B = B\Omega$; kuna eelduse põhjal $\Omega \in \mathcal{C}$, siis $B \in \mathcal{B}$. Teoreem on tõestatud. Tuleb silmas pidada, et σ-algebra $\mathcal{B}$ võib osutuda ka triviaalseks, s. t. sisaldada üksnes ruumi B ja tühja hulka $\emptyset$.

5. Ülesandeid.

1. Kas kõigi ratsionaalarvude hulgal defineeritud hulkade klass $\{A_z : z \in \mathcal{Z}\}$ on jada? Kas leidub jada, mille elementideks on kõik hulgad A_z? Kuidas oleks sellist jada võimalik defineerida?

2. Tõestada, et kui

$$\inf_{t \in T} A_t = \emptyset ,$$

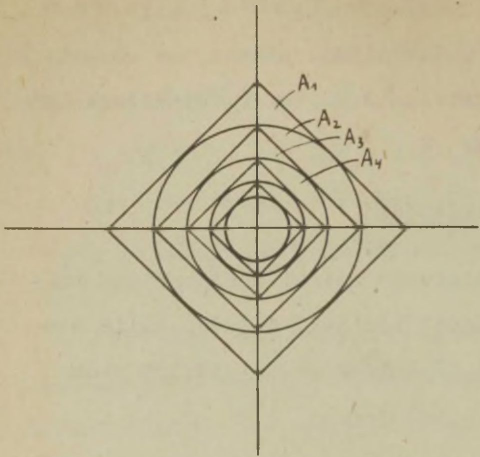
ei tarvitse leiduda indekseid t_1, $t_2 \in T$ nii, et $A_{t_1} \cap A_{t_2} = \emptyset$ (konstrueerida vastav näide juhul $T = (1,2,3)$).

3. Võrrelda hulkade jada koonduvuse definitsiooni arvjada koonduvuse definitsiooniga. Mis on neil definitsioonidel ühist ja mis erinevat? Võrrelda monotoonsete jadade koonduvust arv- ja hulgajadade korral.

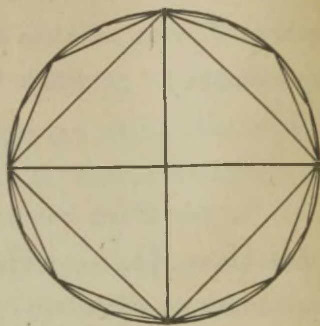
4. Ringi, mis on kinnine loenduva summa suhtes, nimetatakse σ-ringiks. Milline on vahekord ringi, algebra, σ-algebra ja σ-ringi mõistete vahel?

5. Esitada jada A_n (vt. joonis 60) analüütiliselt. Leida selle jada piirväärtus.

6. A_i on korrapärane 2^{i+1}-nurk (vt. joonis 61). Esitada jada A_n analüütiliselt. Leida selle jada piirväärtus.



Joon. 60.



Joon. 61.

§ 2. M õ õ t .

1. Hulgafunktsioon.

Olgu meil antud ruum Ω ja selle ruumi mingi hulkade klass $\mathcal{K}$. Olgu igale hulgale $A \in \mathcal{K}$ seatud vastavusse reaalarv $\varphi(A)$. Siis ütleme, et hulkade klassis $\mathcal{K}$ on defineeritud <u>hulgafunktsioon</u> $\varphi(A)$.

Edaspidi lepime kokku, et vaatleme ainult niisuguseid hulgafunktsioone φ , mis ühegi hulga $A \in \mathcal{K}$ korral ei omanda väärtust $-\infty$, s. t.

$$\varphi(A) > -\infty , \quad A \in \mathcal{K} . \tag{1}$$

Hulgafunktsiooni $\varphi(A)$ nimetatakse <u>lõplikuks</u>, kui iga hulga A korral klassist $\mathcal{K}$ kehtib võrratus

$$\varphi(A) < \infty .$$

Hulgafunktsiooni $\varphi(A)$ nimetatakse <u>σ-lõplikuks</u>, kui iga hulga $A \in \mathcal{K}$ korral leidub jada B_n, $B_n \in \mathcal{K}$ $(n=1,2,\ldots)$ nii, et $B_i \cap B_j = \emptyset$, kui $i \neq j$ ja $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $\varphi(B_i) < \infty$.

Ilmselt on iga lõplik hulgafunktsioon σ-lõplik, kuid vastupidine väide üldiselt ei kehti. (Miks?)

Edaspidi eeldame lihtsuse mõttes, et vaadeldavad hulgafunktsioonid on lõplikud, kui pole tehtud muud kokkulepet. (Vt. pöördel!)

Hulgafunktsiooni $\varphi(A)$ nimetatakse <u>aditiivseks</u>, kui iga klassi $\mathcal{K}$ kuuluvate hulkade A ja B paari korral, mis rahuldavad seoseid $A \cup B \in \mathcal{K}$, $A \cap B = \emptyset$, kehtib võrdus

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B). \tag{2}$$

Nagu näha, on aditiivse hulgafunktsiooni defineerimiseks sobivaim selline hulkade klass $\mathcal{K}$, mis on kinnine liitmise suhtes, kuna siis tarvitseb vaid piirduda eeldustega A, $B \in \mathcal{K}$, $A \cap B = \emptyset$.

<u>Teoreem 1</u>. Kui $A, B, A \setminus B \in \mathcal{K}$, $A \subset B$ ning klassil $\mathcal{K}$ on defineeritud aditiivne hulgafunktsioon $\varphi(A)$, siis

$$\varphi(B \setminus A) = \varphi(B) - \varphi(A). \tag{3}$$

<u>Tõestus</u>. Kuna $A \subset B$, siis $B = (B \setminus A) \cup A$, $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$. Seega φ aditiivsuse tõttu järeldub seosest (2):

$$\varphi(B) = \varphi(B \setminus A) + \varphi(A).$$

Et eelduse tõttu $\varphi(B) < \infty$ ning $\varphi(B \setminus A) > -\infty$, $\varphi(A) > -\infty$ kokkuleppe (1) kohaselt, siis on ka $\varphi(B \setminus A) < \infty$, $\varphi(A) < \infty$ ning kehtibki seos (3).

<u>Järeldus 1</u>. Kui $A, B \in \mathcal{K}$ ja $A \subset B$, $\varphi(B) < \infty$, siis ka $|\varphi(A)| < \infty$. (Tõestada!)

<u>Järeldus 2</u>. Kui $\emptyset \in \mathcal{K}$, siis hulgafunktsiooni $\varphi(A)$ aditiivsusest järeldub seos

$$\varphi(\emptyset) = 0 .$$

(Tõestada! Mida oleks tarvis täiendavalt nõuda selle järelduse tegemiseks siis, kui $\varphi(A)$ ei oleks lõplik hulgafunktsioon?)

Hulgafunktsiooni $\varphi(A)$ nimetatakse <u>σ-aditiivseks</u>, kui iga niisuguse jada $\{A_i\} \subset \mathcal{K}$ korral, et $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$, ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ kui $i \neq j$, kehtib seos

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) . \tag{4}$$

σ-aditiivse hulgafunktsiooni jaoks sobivaim määramispiirkond on loenduva summa suhtes kinnine hulkade klass. (Näiteks?)

Iga σ-aditiivne hulgafunktsioon on ühtlasi aditiivne, (tõestada!) kuid vastupidine omadus üldiselt ei kehti. (Miks?)

σ-aditiivse hulgafunktsiooni jaoks saame tõestada teoreemi, mis on üldistuseks teoreemile 1 ja tema järeldustele.

<u>Teoreem 2</u>. Olgu $\mathcal{K}$ loenduva summa suhtes kinnine hulkade klass, $\emptyset \in \mathcal{K}$; olgu $\varphi(A)$ klassil $\mathcal{K}$ defineeritud aditiivne hulgafunktsioon; olgu $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A, A_i \in \mathcal{K}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Siis rida $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$ koondub absoluutselt.

<u>Tõestus</u>. Võtame kasutusele tähistused

$$A_i^+ = \begin{cases} A_i, & \varphi(A_i) > 0, \\ \emptyset, & \varphi(A_i) \leq 0; \end{cases} \qquad A_i^- = \begin{cases} A_i, & \varphi(A_i) \leq 0, \\ \emptyset, & \varphi(A_i) > 0. \end{cases}$$

Siis kehtivad seosed $A_i = A_i^+ \cup A_i^-$, $A_i^+, A_i^- \in \mathcal{K}$, $A_i^+ \cap A_i^- = \emptyset$ $(i=1,2,\ldots)$.

Tähistame $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^+ = A^+$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^- = A^-$; ilmselt $A^+ \cap A^- = \emptyset$ ja $A^+, A^- \in \mathcal{K}$.

Kuna $A = A^+ \cup A^-$, $\varphi(A) < \infty$, $\varphi(A^+) > 0$, $\varphi(A^-) > -\infty$, siis on $\varphi(A^+) < \infty$, $\varphi(A^-) < \infty$, see aga tähendab $\varphi(A)$ σ-aditiivsuse tõttu, arvestades A_i^+ ja A_i^- definitsiooni, et kehtivad võrdused:

$$|\varphi(A^+)| = \left|\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^+\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i^+)\right| = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(A_i^+)| < \infty ,$$

ja

$$|\varphi(A^-)| = \left|\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^-\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i^-)\right| = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(A_i^-)| < \infty ,$$

siit aga järeldubki

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(A_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(A_i^+)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(A_i^-)| < \infty .$$

Näide 1. Olgu $\mathcal{K}$ reaaltelje tõkestatud poollõikude hulk. Defineerime klassil $\mathcal{K}$ järgmised hulgafunktsioonid:

$$\varphi_1([a,b)) = \max(|a|,|b|) ,$$
$$\varphi_2([a,b)) = a - b ,$$
$$\varphi_4([a,b)) = b - a .$$

Näide 2. Olgu $\mathcal{K}_\infty = \mathcal{K} \cup \{(-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, \infty), a,b \in R\}$. Defineerime klassil $\mathcal{K}_\infty$ funktsiooni $\varphi_3(A)$:

$$\varphi_3(A) = \varphi_4(A) , \quad A \in \mathcal{K} ;$$
$$\varphi_3(A) = \infty , \quad A \in (\mathcal{K}_\infty \setminus \mathcal{K}) .$$

Paneme tähele, et $\varphi_1([a,b))$ on lõplik, kuid ei ole aditiivne; $\varphi_2([a,b))$ ja $\varphi_4([a,b))$ on lõplikud ja σ-aditiivsed; $\varphi_3([a,b))$ on σ-aditiivne ja σ-lõplik. (Tõestada!)

Klass $\mathcal{K}$ ei ole kinnine ei vahe ega ka summa suhtes. (Miks?)

2. Pidev hulgafunktsioon.

Hulkade klassil $\mathcal{K}$ defineeritud hulgafunktsiooni $\varphi(A)$ nimetame alt pidevaks, kui iga mittekahaneva jada A_n korral, kui $A_n \in \mathcal{K}$ $(n=1,2,\ldots)$ ja $\lim A_n \in \mathcal{K}$, kehtib seos

$$\varphi(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) . \tag{5}$$

Hulgafunktsiooni $\varphi(A)$ nimetatakse ülalt pidevaks, kui iga mittekasvava jada A_n korral, kui $A_n \in \mathcal{K}$ $(n=1,2,\ldots)$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{K}$, kehtib võrdus:

$$\varphi(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) . \tag{6}$$

Kui hulgafunktsioon on ülalt ja alt pidev, nimetatakse teda pidevaks.

Võib rääkida ka hulgafunktsiooni pidevusest mingil hulgal A: hulgafunktsiooni $\varphi(A)$ nimetame pidevaks hulgal A siis, kui seosed (5) ja (6) kehtivad kõigi hulgaks A koonduvate monotoonsete jadade korral.

Pidevate hulgafunktsioonide loomulikuks määramispiirkonnaks on monotoonsed klassid. Edaspidi eeldame alati, et klassiks $\mathcal{K}$, millel hulgafunktsioon $\varphi(A)$ on defineeritud, on σ-algebra $\mathcal{C}$. Vaatleme nüüd, kuidas on hulgafunktsioonide omadused omavahel seotud.

Teoreem 3. Aditiivne alt pidev hulgafunktsioon $\varphi(A)$ on σ-aditiivne.

Tõestus. Vaatleme σ-algebrat $\mathcal{C}$, hulkade jada A_i, $A_i \in \mathcal{C}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j,\ i,j=1,2,\ldots)$. Defineerime hulgad $B_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ $(k=1,2,\ldots)$. Ilmselt ka $B_k \in \mathcal{C}$ ning jada B_k on mittekahanev. Seega eksisteerib $\lim\limits_{k\to\infty} B_k \in \mathcal{C}$, ning eelduse tõttu kehtib seos

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(B_k) = \varphi(\lim_{k\to\infty} B_k) ,$$

siit aga järeldub:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \varphi(\lim_{k\to\infty} \bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) . \qquad (7)$$

Kuid $\varphi(A)$ aditiivsuse tõttu $\varphi(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(A_i)$.

Saadud seost kasutades teisendame võrduse (7) vasakut poolt

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \varphi(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) . \qquad (8)$$

Võrdused (7) ja (8) koos annavadki võrduse (4); teoreem on sellega tõestatud.

Õige on ka selle teoreemi pöördteoreem, isegi mõnevõrra tugevamal kujul.[6]

Teoreem 4. σ-aditiivne hulgafunktsioon $\varphi(A)$ on pidev.

Tõestus. a) Tõestame kõigepealt funktsiooni $\varphi(A)$ alt pidevuse. Olgu meil mingi jada A_n, $A_n \nearrow A$, $A_n \in \mathcal{C}$; siis kindlasti ka $A \in \mathcal{C}$.

Defineerime hulkade jada B_n :

$$B_1 = A_1, \quad B_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i .$$

Ilmselt ka $B_i \in \mathcal{C}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, kui $i \neq j$, ning $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Leiame nüüd $\lim_{k\to\infty} \varphi(A_k)$. Kasutades hulkade B_k

---

[6] Olgu märgitud, et tõestatud teoreemid jäävad kehtima ka nõrgemate eeldustega hulkade klassi $\mathcal{K}$ puhul, kuid siis tuleks väidetele kogu aeg lisada klausel "kui vastav funktsioon on määratud".

definitsiooni ja funktsiooni $\varphi(A)$ σ-aditiivsust, saame:

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(A_k) = \lim_{k\to\infty}\varphi(\bigcup_{i=1}^{k} B_i) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\varphi(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi(B_i) .$$

Teiselt poolt aga funktsiooni $\varphi(A)$ σ-aditiivsuse tõttu:

$$\varphi(\lim_{k\to\infty} A_k) = \varphi(\lim_{k\to\infty}\bigcup_{i=1}^{k} B_i) = \varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi(B_i) .$$

Mõlemaid võrdusi kokku võttes saamegi seose (5), ning teoreemi esimene pool on tõestatud.

b) Tõestame nüüd funktsiooni $\varphi(A)$ ülalt pidevuse.

Olgu meile antud mingi hulkade jada A_n ; $A_n \in \mathcal{C}$ nii, et $A_n \searrow A$.

Vaatleme jada $B_i = A_1 \setminus A_{i+1}$ (i=1,2,...). Et $A_{1+i} \subset A_1$, siis jada B_i on mittekahanev, $B_i \nearrow B$. Teoreemi osa a) põhjal on $\varphi(A)$ alt pidev, seega kehtib võrdus

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(B_k) = \varphi(\lim_{k\to\infty} B_k) .$$

Avaldame seose mõlemad pooled jada A_i hulkade kaudu, seejärel rakendame võrdust (3) (jada B_i konstruktsiooni ning meie eelduse põhjal on selle rakendamine lubatav):

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(B_k) = \lim_{k\to\infty}\varphi(A_1\setminus A_{1+k}) = \lim_{k\to\infty}\left[\varphi(A_1) - \varphi(A_{1+k})\right] =$$

$$= \varphi(A_1) - \lim_{k\to\infty}\varphi(A_{1+k}) = \varphi(A_1) - \lim_{n\to\infty}\varphi(A_n) ;$$

tähistame $1+k = n$; kui $k\to\infty$, siis ka $1+k = n \to\infty$.

Teiselt poolt saame, kasutades jällegi võrdust (3):

$$\varphi(\lim_{k\to\infty} B_k) = \varphi\left[\lim_{k\to\infty}(A_1\setminus A_{1+k})\right] = \varphi(A_1\setminus\lim_{k\to\infty} A_{1+k}) =$$

$$= \varphi(A_1) - \varphi(\lim_{n\to\infty} A_n) .$$

Mõlemaid võrdusi kokku võttes saame:

$$\varphi(A_1) - \lim_{n\to\infty}\varphi(A_n) = \varphi(A_1) - \varphi(\lim_{n\to\infty} A_n) ,$$

seega

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} A_n) .$$

mida oligi tarvis tõestada.

3. Mõõt.

σ-algebral $\mathcal{C}$ määratud σ-aditiivset lõplikku mittenegatiivset hulgafunktsiooni nimetatakse lõplikuks mõõduks.

σ-algebral $\mathcal{C}$ määratud σ-aditiivset σ-lõplikku mittenegatiivset hulgafunktsiooni nimetatakse σ-lõplikuks mõõduks. Edaspidi mõistame mõõduna alati (kui pole tehtud mingit muud kokkulepet) lõplikku mõõtu, mille tähistame sümboliga $\mu(A)$.

Lõplikku mõõtu $\mu(A)$, mille korral $\mu(\Omega) = 1$, nimetatakse tõenäosusmõõduks. Tõenäosusmõõdu tähistame sümboliga $P(A)$.

Lõpliku mõõdu definitsiooni võib anda ka vahetult.

Olgu ruum Ω mõõtuv σ-algebra $\mathcal{C}$ suhtes ja olgu igale mõõtuvale hulgale A $(A\in\mathcal{C})$ seatud vastavusse reaalarv $\mu(A)$ nii, et

$$1.\quad 0 \leq \mu(A) < \infty ; \tag{9}$$

$$2.\quad \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) , \quad \text{kui}$$

$$A_i\in\mathcal{C} \quad \text{ja} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i\neq j,\ i,=1,2,\dots) . \tag{10}$$

Mõõtuvat ruumi $(\Omega, \mathcal{C})$, milles on defineeritud mõõt[7]

[7] Edaspidi tähistame sageli mõõtu ilma argumendita, s.t. kirjutame mõõt μ , mida tuleks mõista hulgafunktsioonina $\mu(A)$.

$\mu(A)$ (lõplik või σ-lõplik), nimetame <u>mõõduga ruumiks</u> ja tähistame sümboliga $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$. Sel juhul öeldakse ka, et mõõt $\mu(A)$ on defineeritud hulkade klassil $\mathcal{C}$).

Vaatleme nüüd mõõtude omadusi. Paneme tähele, et niihästi lõplike kui ka σ-lõplike mõõtude korral kehtivad kõik aditiivsete funktsioonide omadused, muuhulgas näeme, et mõõtuval ruumil defineeritud mõõt on pidev kõigil mõõtuvatel hulkadel. Mõõdu mittenegatiivsusest tulenevad aga mõningad mõõdu eriomadused.

<u>Mõõdu monotoonsus:</u>

Kui $A, B \in \mathcal{C}$ ja $A \subset B$, siis

$$\mu(A) \leq \mu(B) . \tag{11}$$

Tulemus järeldub vahetult teoreemist 1 ja mõõdu mittenegatiivsusest. (Tõestada!)

<u>Teoreem 5</u>. Kui $A_i \in \mathcal{C}$ $(i=1,2,\ldots)$ ja μ on klassil $\mathcal{C}$ defineeritud mõõt, siis kehtivad võrratused:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \quad (n=1,2,\ldots) \tag{12}$$

ja

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) . \tag{13}$$

<u>Tõestus</u>. Defineerime hulgad:

$$C_1 = A_1 ,$$

$$C_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \quad (k=1,2,\ldots,n \text{ või } k=1,2,\ldots) .$$

Ilmselt $C_k \in \mathcal{C}$, $C_k \cap C_j = \emptyset$, $(k \neq j,\ j,k = 1,2,\ldots)$

ning

$$\bigcup_{i=1}^{k} C_i = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \text{ ; seega } \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right) \quad (k=1,2,\ldots). \tag{14}$$

Teiselt poolt aga $C_i \subset A_i$ $(i=1,2,\ldots)$ ja mõõdu monotoonsuse (seos (11)) tõttu saame iga k korral võrratuse

$$\mu(A_i) \geqslant \mu(C_i) .$$

Siis ka $\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \mu(C_i)$ $(k = 1,2,\ldots,n$ või $k = 1,2,\ldots)$. (15)

Kuid mõõdu σ-aditiivsuse tõttu leiavad aset võrdused

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \tag{16}$$

ja

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) . \tag{17}$$

Seoseid (14), (15) ja (16) kokku võttes saamegi võrratuse (12), seostest (14), (15) ja (17) tuleneb võrratus (13).

Tuleb märkida, et sageli nimetatakse σ-aditiivset lõplikku ja σ-lõplikku hulgafunktsiooni vastavalt lõplikuks ja σ-lõplikuks <u>üldistatud mõõduks</u>. (Mille poolest erineb üldistatud mõõt mõõdust?)

4. <u>Mõõdu jätkamine</u>.

Olgu määratud ruumi Ω hulkade klassid $\mathcal{K}_1$ ja $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3 \neq \emptyset$. Olgu hulkade klassidel $\mathcal{K}_1$ ja $\mathcal{K}_2$ defineeritud vastavalt mõõdud μ_1 ja μ_2 . Kui iga $A \in \mathcal{K}_3$ korral

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) ,$$

siis ütleme, et mõõdud μ_1 ja μ_2 langevad ühte klassil $\mathcal{K}_3$.

Kui $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$ ja μ_1 ning μ_2 langevad ühte klassil $\mathcal{K}_1$, siis me ütleme, et mõõt μ_2 on mõõdu μ_1 <u>jätk</u> klassil $\mathcal{K}_2$. Kui mõõdul μ_1 eksisteerib üksainus jätk klassil $\mathcal{K}_2$, siis me ütleme, et mõõdul μ_1 on klassil $\mathcal{K}_2$ <u>määratud</u> (determineeritud) jätk. Edaspidi tähistame me mõõdu määratud jätku sama tähega nagu mõõtu ennastki.

Nagu nägime, oli mõõdu määramiseks loomulik hulkade klass σ-algebra. Seda asjaolu väljendab ka järgnev teoreem.

<u>Teoreem 6.</u> (Caratheodory teoreem.) Kui mõõt μ on defineeritud meelevaldsel hulkade klassil $\mathcal{K}_1$, siis eksisteerib tal määratud jätk klassi $\mathcal{K}_1$ poolt indutseeritud minimaalsel σ-algebral $C(\mathcal{K}_1)$. Kui mõõt μ on σ-lõplik või lõplik, siis on ka tema jätk σ-lõplik.

Teoreemi tõestuskäik on küllaltki pikk: selles näidatakse mõõdu jätku konstruktsioon, kasutades selleks täiendavalt defineeritud hulgafunktsioone - nn. <u>välis-</u> ja <u>sisemõõte</u>. Nimetatud mõttekäiku rakendatakse reaalmõõtuja funktsiooniteoorias Lebesgue'i mõõdu konstrueerimisel (vt. [2], [6]).

5. <u>Mõõdu täielikustamine</u>.

Olgu (Ω, C, μ) mõõduga ruum. Nagu tõestatud, on $\mu(\emptyset) = 0$; teiselt poolt ei järeldu võrdusest $\mu(N) = 0$ kaugeltki, et $N = \emptyset$. Vaatleme kõigi selliste hulkade N klassi $\mathcal{N}$, mille korral $\mu(N) = 0$, $N \in \mathcal{N}$.

Ilmselt klass $\mathcal{N}$ on ring: kui $N, M \in \mathcal{N} \subset C$, siis ka $M \cup N \in C$ ja $M \setminus N \in C$ ning mõõdu aditiivsuse ning monotoonsuse tõttu ka $\mu(M \cup N) = \mu(M \setminus N) = 0$, seega ka $M \cup N \in \mathcal{N}$ ning $M \setminus N \in \mathcal{N}$.

Teeme reaalmuutuja funktsiooniteoorias tavalise kokkuleppe: kui $N_i \in \mathcal{C}$, $\mu(N_i) = 0$, $N_i \cap N_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, siis ka

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i) = 0 .$$

Siis osutub klass $\mathcal{N}$ σ-ringiks. (Tõestada!)

Üldiselt ei tarvitse meelevaldne hulk M, mis kuulub mõõtuvasse hulka $N \in \mathcal{N}$, olla mõõtuv. Sageli on aga otstarbekas omistada ka nullmõõduga hulga alamhulkadele mõõt null. Osutub, et ka hulkade klass $\mathcal{M} = \{M,\ M \subset N,\ \mu(N) = 0\}$ moodustab σ-ringi.

Kasutades hulki $M \in \mathcal{M}$, võime me laiendada ka mõõtu omavate hulkade klassi, defineerides:

$$\mu((A \setminus M_1) \cup M_2) = \mu(A) , \qquad (18)$$

kus $A \in \mathcal{C}$, M_1, $M_2 \in \mathcal{M}$.

Osutub, et ka selliste hulkade klass on σ-algebra. Nimetame seosega (18) määratud mõõtu täielikustatud mõõduks. Tähistame hulkade klassi:

$$\{B : B = (A \setminus M_1) \cup M_2 ,\ A \in \mathcal{C},\ M_1, M_2 \in \mathcal{M}\} = \mathcal{C}_0$$

ning loeme mõõtuvateks kõiki σ-algebrasse $\mathcal{C}_0$ kuuluvaid hulki.

On võimalik tõestada, et jätkates mõõtu Caratheodory teoreemis antud konstruktsiooni abil, saame täielikustatud mõõdu.

Näide 3. Ruumis R_1 on võimalik kõigil lõikudel (või vahemikel või poollõikudel) $[a,b]$ määrata mõõt seosega

$\mu[a,b] = b-a$. Selle mõõdu jätkamisel kõigile Boreli hulkadele saame nn. Lebesgue'i mõõdu. Lebesgue'i mõõt on täieliikustatud mõõt. Lugedes mõõtuvaiks kõik hulgad, millel eksisteerib Lebesgue'i mõõt, saame Lebesgue'i mõttes mõõtuvate hulkade klassi, mis sisaldab Boreli mõttes mõõtuvate hulkade klassi. Viimased erinevad üksteisest ainult hulkadel mõõduga null.

Näide 4. Näites 1 defineeritud funktsioon φ_4 ei ole mõõt (miks?), samuti ei ole mõõt ka φ_1 , kuid φ_2 ja φ_3 määravad vastavalt lõpliku ja σ-lõpliku mõõdu, kusjuures φ_3 on mõõdu φ_2 jätkuks klassil $\mathcal{K}_\infty$.

Näide 5. Defineerime ruumi $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; $\mathcal{C} = \mathcal{D}_\Omega$, $\varphi(\{i\}) = \frac{1}{6}$ $(i=1,2,\ldots,6)$. Et $\mathcal{D}_\Omega = \mathcal{C}(1,2,\ldots,6)$, siis on sellega mõõt määratud kogu σ-algebral $\mathcal{D}_\Omega$. Olgu märgitud, et selliselt defineeritud mõõt on tõenäosusmõõt. (Miks?)

Näide 6. Vaatleme näites 1.11 defineeritud σ-algebrat $\mathcal{C}$, ning defineerime siin nn. "loendava" mõõdu, võttes $\mu(A) = k$, kui A sisaldab k ühikruutu. Mõõt on σ-lõplik. (Tõestada!)

Näide 7. Vaatleme ruumi R σ-algebrat $\mathcal{D}_R$ ja defineerime siin "loendava" mõõdu: $\mu(A) = k$, kui hulk A sisaldab k täisarvu. Saadud mõõt on σ-lõplik. (Tõestada!)

Näide 8. Vaatleme näites 1.11 defineeritud σ-algebrat ning loeme hulga $A_{n,m}$ mõõduks $\mu(A_{n,m}) = \frac{2^{-c-3}}{1+2c}$, kus $c = \max[\min(|n|,|n+1|), \min(|m|,|m+1|)]$.

Sellisel viisil defineeritud mõõt on tõenäosusmõõt. (Tõestada!)

Osutub, et näidetes 5, 6 ja 8 defineeritud mõõte ei ole võimalik täielikustada, sest neis on ainult tühja hulga mõõt 0. Näites 7 defineeritud mõõtu ei ole võimalik täielikustada seetõttu, et kõik ruumi Ω hulgad on juba mõõtuvad.

Näide 9. Olgu ruumiks Ω arvsirge R. Defineerime mõõdu μ igale poollahtisele lõigule $A = [a,b)$ seosega:

$$\mu(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx .$$

Sellist mõõtu saame jätkata igale Boreli mõttes mõõtuvale hulgale. (Tõestada, et mõõt μ on tõenäosusmõõt!)

Näide 10. Olgu ruumiks Ω täisarvude hulk T ja $\mathcal{C} = \mathcal{D}_{\Omega}$; Fikseerime suvaliselt naturaalarvu n ja reaalarvu p, $0 < p < 1$. Määrame punkti m mõõdu:

$$\mu(m) = C_n^m p^n q^n , \quad \text{kui} \quad 0 \leqslant m \leqslant n$$

$$\mu(m) = 0 \quad \text{ülejäänud juhtudel}$$

(siin $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ja $q = 1 - p$).

Näide 11. Olgu ruumiks Ω täisarvude hulk ja $\mathcal{C} = \mathcal{D}_{\Omega}$; fikseerime suvalise mittenegatiivse reaalarvu λ.

Määrame punkti m mõõduks $\mu(m) = \frac{e^{-\lambda}}{m!} \lambda^m , \quad m \geqslant 0$

$$\mu(m) = 0 , \quad m < 0 .$$

Kuigi mõõtuvate hulkade klass on siin sama mis eelnevaski näites, leidub käesoleva näite puhul nullist erineva mõõduga hulki lõpmata palju.

6. Ülesandeid.

1. Tuua näide negatiivse mitteaditiivse lõpliku hulgafunktsiooni kohta.

2. Mida on vaja nõuda funktsioonilt $\varphi(A)$ selleks, et ta oleks hulgal $\emptyset$ pidev?

3. Kas üldistatud mõõdu korral kehtib monotoonsuse omadus?

4. Tõestada, et näidetes 5–7 esitatud mõõdud on σ-aditiivsed.

5. Tõestada, et näidetes 10 ja 11 esitatud mõõdud on tõenäosusmõõdud.

§ 3. M õ õ t u v f u n k t s i o o n.

1. Funktsioon abstraktses ruumis.

Olgu Ω_1 ja Ω_2 suvalised ruumid.

Funktsiooni X ruumist Ω_1 ruumi Ω_2, lühidalt $X\ (\Omega_1 \to \Omega_2)$ defineerime eeskirjana, mis seab üheselt igale ruumi Ω_1 punktile ω_1 vastavusse mingi punkti $\omega_2 = X\ (\omega_1)$, $\omega_2 \in \Omega_2$.

Funktsioon X ei tarvitse olla üksühene: võib leiduda veel mingi teine punkt $\omega_1' \in \Omega_1'$ nii, et ka

$$X\ (\omega_1') = \omega_2 .$$

Punkti ω_2 nimetatakse punkti ω_1 kujutiseks (funktsiooni X järgi), punkti ω_1 – punkti ω_2 originaaliks (funktsiooni X järgi). Ruum Ω_1 on funktsiooni X määramispiirkond.

Olgu A_1 mingi hulk ruumist Ω_1. Hulga A_1 kõigi punktide kujutiste hulka

$$\{\omega_2 : \omega_2 \in X(\omega_1), \omega_1 \in A_1\}$$

nimetatakse hulga A_1 kujutiseks (funktsiooni X järgi) ja tähistatakse sümboliga $X(A_1)$.

Võime kõnelda ka hulkade klassi $\mathcal{K}$ kujutisest (funktsiooni X järgi),

$$\{A_2 : A_2 = X(A_1), A_1 \in \mathcal{K}\}$$

ning tähistame selle kujutise sümboliga $X(\mathcal{K})$. Kõigi ruumi Ω_1 punktide kujutiste hulka

$$\{\omega_2 : \omega_2 = X(\omega_1), \omega_1 \in \Omega_1\} = X(\Omega_1)$$

nimetatakse funktsiooni <u>X väärtuste hulgaks</u>:

<u>Näide 1</u>. Indeksite hulgal T defineeritud hulkade klass määrab funktsiooni $X(T \to \mathcal{D}_\Omega)$, seades igale reaalarvule $t \in T$ vastavusse hulga A_t ruumi Ω kõigi alamhulkade klassist $\mathcal{D}_\Omega$.

<u>Näide 2</u>. Mõõt μ on funktsioon $\mu(\mathcal{C} \to [0,\infty))$, mis seab kõigi mõõtuvate hulkade klassi $\mathcal{C}$ igale elemendile A vastavusse mittenegatiivse reaalarvu $\mu(A)$. Tõenäosusmõõt P aga on funktsioon $P(\mathcal{C} \to [0,1])$.

2. <u>Pöördkujutis</u>.

Olgu meil vaatlusel mingi hulk $A_2 \in \Omega_2$. Selle hulga originaaliks (funktsiooni X järgi) nimetame kõigi nende punktide hulka, mille kujutis sisaldub hulgas A_2, s. t.

$$\{\omega_1 : X(\omega_1) \in A_2\}.$$

Samuti on klassi $\mathcal{K}_2$ originaal:

$$\left\{A_1 : A_1 = \left\{\omega_1 : X(\omega_1) \in A_2\right\},\ A_2 \in \mathcal{K}_2\right\}.$$

Hulga A_2 originaal kuulub alati ruumi Ω_1. Kuna üldiselt kõik ruumi Ω_2 punktid ei tarvitse kujutamisest osa võtta (s. t. võib leiduda punkte ω_2, mis ei ole ühegi punkti ω_1 kujutiseks), siis võib esineda olukordi, et mittetühja hulga originaaliks on tühi hulk.

Kui vastavusest võtavad osa kõik ruumi Ω_2 punktid, siis ütleme, et kujutamine toimus <u>ruumiks</u> Ω_2. Sel juhul on ainult tühihulga originaaliks tühi hulk, ning funktsiooni X väärtuste hulk $X(\Omega_1) = \Omega_2$ (üldiselt $X(\Omega_1) \subset \subset \Omega_2$).

Kogu ruumi Ω_2 originaal on alati mittetühi, see langeb ühte kogu ruumiga Ω_1.

<u>Teoreem 1</u>. Hulk A_1 sisaldub alati oma kujutise

$$X(A_1) = A_2$$

originaalis, s. t.:

$$A_1 \subset \left\{\omega_1 : X(\omega_1) \in A_2\right\},$$

kusjuures võrdus

$$A_1 = \left\{\omega_1 : X(\omega_1) \in A_2\right\}$$

leiab üldiselt aset juhul, kui funktsioon X on üksühene. Teoreemi tõestamiseks on tarvis kasutada vaid kujutise ja originaali mõistet ning funktsiooni ühesust. (Tõestada teoreem iseseisvalt!)

Seades igale hulgale A_2 (sealhulgas ka ühepunktilisele hulgale $\{\omega_2\}$) vastavusse tema originaali

$$\left\{\omega_1 : X(\omega_1) \in A_2\right\}$$

defineerime vastavuse ruumi Ω_2 hulkade ja ruumi Ω_1 hulkade vahel. Seda vastavust nimetame funktsiooni X pöördkujutiseks ja tähistame sümboliga X^{-1}, seega võime kirjutada:

$$\{\omega_1 : X(\omega_1) \in A_2\} = X^{-1}(A_2), \qquad (1)$$

eriti

$$\{\omega_1 : X(\omega_1) = \omega_2\} = X^{-1}(\omega_2), \qquad (2)$$

ja

$$\{\omega_1 : X(\omega_1) \in \Omega_2\} = X^{-1}(\Omega_2);$$

samuti ka

$$\{A_1 : A_1 = \{\omega_1 : X(\omega_1) \in A_2\},\ A_2 \in \mathcal{K}_2\} = X^{-1}(\mathcal{K}_2).$$

Kuna X ei ole üldiselt üksühene, siis ei ole X^{-1} tavalises mõttes funktsioon: iga punkti ω_2 pöördkujutis $X^{-1}(\omega_2)$ sisaldab üldiselt enam kui ühte punkti (sest ω_2 võib olla mitme erineva punkti ω_1, ω_1', ... kujutiseks).

Seega näeme, et eelmises punktis antud ja üldiselt matemaatikas kasutatava funktsiooni mõistega võrreldes on pöördkujutis mõnevõrra üldisem mõiste. Esitame pöördkujutise definitsiooni:

Kui ruumi Ω_2 igale hulgale A_2 (sealhulgas ka igale ühepunktilisele hulgale) on vastavusse seatud mingi kindel (tühi või mittetühi) hulk $X^{-1}(A_2)$ ruumist Ω_1, siis ütleme, et meil on defineeritud pöördkujutis $X^{-1}(\Omega_2 \to \Omega_1)$.

3. Pöördkujutise poolt indutseeritud hulkade klassid.

Tuleb märkida, et pöördkujutisel on mitmed huvitavad omadused, mille kohta järgnevalt esitame mõningad teoreemid.

Teoreem 2. Pöördkujutis $X^{-1}(\Omega_2 \to \Omega_1)$ jagab ruumi Ω_1 ühisosata hulkadeks $X^{-1}(\omega_2)$, s. t.

$$X^{-1}(\omega_2) \cap X^{-1}(\omega_2') = \emptyset, \text{ kui } \omega_2 \neq \omega_2'.$$

(Teoreemi tõestamisel kasutatakse üksnes pöördkujutise definitsiooni ja funktsiooni ühesust - tõestada!)

Järeldus 1. Ruumi Ω_2 suvaliste ühisosata hulkade originaalid ruumis Ω_1 on ühisosata, s. t. kui $A_2 \cap A_2' = \emptyset$, siis ka

$$(X^{-1}(A_2)) \cap (X^{-1}(A_2')) = \emptyset \text{ . (Tõestada!)}$$

Teoreem 3. Pöördkujutis säilitab hulkade sisalduvusseosed ning hulgateoreetilised operatsioonid.

1. Kui $A_2 \subset B_2$, siis $X^{-1}(A_2) \subset X^{-1}(B_2)$;

2. $X^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha}(X^{-1}(B_\alpha))$,

$X^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha}(X^{-1}(B_\alpha))$

mistahes hulkade klassi $\mathcal{K} = \{B_\alpha : \alpha \in T, B_\alpha \in \Omega_2\}$ korral. (Tõestada!) Viimastest seostest tulenevad järgmised olulised väited:

Järeldus 2. Olgu ruumis Ω_2 määratud σ-algebra $\mathcal{C}_2$; selle σ-algebra originaal $\mathcal{C}_1$ ruumis Ω_1, $\mathcal{C}_1 = X^{-1}(\mathcal{C}_2)$ on samuti σ-algebra. Seda nimetatakse pöördkujutise X^{-1} poolt indutseeritud σ-algebraks.

Järeldus 3. Olgu $\mathcal{K}_2$ ruumis Ω_2 mingi hulkade klass ning $\mathcal{C}(\mathcal{K}_2)$ selle hulkade klassi poolt indutseeritud σ-algebra. Siis $X^{-1}(\mathcal{C}(\mathcal{K}_2))$ on minimaalne hulkade klassi $X^{-1}(\mathcal{K}_2)$ poolt indutseeritud σ-algebra:

$$\mathcal{C}(X^{-1}(\mathcal{K}_2)) = X^{-1}(\mathcal{C}(\mathcal{K}_2)) \text{ .}$$

Järeldus 4. Olgu ruumis Ω_1 määratud σ-algebra $\mathcal{C}_1$; kõik sellised hulgad ruumis Ω_2, mille pöördkujutised kuuluvad σ-algebrasse Ω_1, moodustavad σ-algebra, mille tähistame tähega $\mathcal{C}_2$:

$$\{A_2 : X^{-1}(A_2) \in \mathcal{C}_1\} = \mathcal{C}_2 . \qquad (3)$$

σ-algebrat $\mathcal{C}_2$ nimetatakse σ-algebra $\mathcal{C}_1$ kujutiseks, mis on indutseeritud pöördkujutise X^{-1} abil.

Pöördkujutise abil on võimalik indutseerida ka mõõtu. Olgu ruumis $(\Omega_1, \mathcal{C}_1)$ defineeritud mõõt μ_1. Defineerime mõõdu μ_2 ruumis $(\Omega_2, \mathcal{C}_2)$, kus $\mathcal{C}_2$ on pöördkujutise X^{-1} abil indutseeritav σ-algebra, seosega:

$$\mu_2(A_2) = \mu_1 [X^{-1}(A_2)] .$$

Seega on mõõt defineeritud iga $\mathcal{C}_2$ mõttes mõõtuva (vt. seos (3)) hulga A_2 jaoks. Sellist mõõtu μ_2 tähistame edaspidi sümboliga $\mu_1 X^{-1}$, s. t.

$$\mu_2(A_2) = \mu_1 X^{-1}(A_2) .$$

4. Indikaatorfunktsioon.

Vaatleme suvalist ruumi Ω_1 ja ruumi $\Omega_2 = \{0,1\}$. Fikseerime mingi mittetühja hulga $A \subset \Omega_1$.

Defineerime funktsiooni $I_A(\Omega_1 \to \Omega_2)$ järgmiselt (vrd. funktsiooniga I_A ptk. I p. 7.1).

$$I_A(\omega_1) = \begin{cases} 1 , & \text{kui } \omega_1 \in A , \\ 0 , & \text{kui } \omega_1 \notin A . \end{cases}$$

Funktsioon [8] I_A on määratud iga punkti ω_1 jaoks. Seda funktsiooni nimetatakse <u>hulga A indikaatorfunktsiooniks</u>. Ilmselt saab iga hulga A jaoks ruumist Ω_1 defineerida indikaatorfunktsiooni, seega on indikaatorfunktsi-

---

[8] Edaspidi jätame indikaatorfunktsioonil vahel lihtsuse mõttes argumendi märkimata, s. t. kirjutame $I_A = I_A(\omega)$.

oonide hulk seatav üksühesesse vastavusse hulkade klassiga $\mathcal{D}_{\Omega}$. Muuhulgas saab indikaatorfunktsioonid omistada ka tühjale hulgale ja kogu ruumile; need osutuvad konstantseteks:

$$I_{\emptyset} = 0 \; ; \quad I_{\Omega_1} = 1 \, ,$$

sealjuures on need hulgad ka ainsad, mille indikaatorfunktsioon on konstantne. (Miks?)

Paneme tähele, et tehetele hulkade vahel vastavad ka teatavad tehted nende hulkade indikaatorfunktsioonide vahel. Tulemusi kokku võttes saame järgneva teoreemi:

Teoreem 4:

a) Kui $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, siis $I_{A_1 \cup B_1} = I_{A_1} + I_{B_1}$;

b) $I_{\bar{A}_1} + I_{A_1} = 1$;

b) kui $A_1 \subset B_1$, siis $I_{A_1} \leq I_{B_1}$;

c) $I_{A_1 \cap B_1} = I_{A_1} \cdot I_{B_1}$.

(Tõestada teoreem, kasutades selleks indikaatorfunktsiooni definitsiooni!)

5. Lihtfunktsioon ja elementaarfunktsioon.

Edaspidi vaatleme eeskätt selliseid funktsioone $X(\Omega_1 \to \Omega_2)$, mille korral $\Omega_2 = R$, s. t. reaalarvuliste väärtustega funktsioone. Selliste funktsioonide hulka kuuluvad ka mõõt (mõõdu korral on $\Omega_1 = \mathcal{C}$) ja indikaatorfunktsioon. Ka lõpliku hulga indikaatorfunktsioonide lineaarne kombinatsioon määrab reaalarvuliste väärtustega funktsiooni:

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, I_{A_i}(\omega) , \tag{4}$$

kus $r_i \in R$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega_1$.

Selliselt defineeritud funktsioon X ($\Omega_1 \to R$) on üheselt määratud kogu ruumis Ω_1 ; see ilmneb eriti selgesti järgmisest, seosega (4) samaväärsest definitsioonist:

$$X(\omega)=\begin{cases} r_1 , & \text{kui } \omega \in A_1 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots & , \\ r_n , & \text{kui } \omega \in A_n . \end{cases}$$

Erilist huvi pakub ülaldefineeritud funktsioon erijuhul, kui ruum Ω_1 on mõõtuv, s.t. kui on defineeritud σ-algebra $\mathcal{C}_1$. Juhul, kui kõik hulgad A_i, mis esinevad seoses (4), on mõõtuvad, nimetatakse seda funktsiooni <u>lihtfunktsiooniks</u>. Lihtfunktsioon indutseerib ruumi Ω_1 jaotuse lõplikuks hulgaks osadeks: $A_i = X^{-1}(r_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$.

Vaatleme nüüd loenduva hulga indikaatorfunktsioonide lineaarset kombinatsiooni:

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \, I_{A_i}(\omega) ,$$

kus $r_i \in R$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(i \neq j)$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega_1$. (5)

Juhul, kui kõik hulgad A_i on mõõtuvad, nimetame funktsiooni (5) <u>elementaarfunktsiooniks</u>. Elementaarfunktsioonil on loenduv hulk erinevaid väärtusi $r_i (i=1,2,\dots)$ ning ta indutseerib ruumi Ω_1 jaotuse loenduvaks hulgaks osadeks:

$$A_i = X^{-1}(r_i) , \quad i = 1,2,\dots .$$

Märgime ära elementaarfunktsiooni veel ühe olulise omaduse. Olgu B suvaline hulk ruumis R . Leiame selle hulga originaali:

$$X^{-1}(B) = \{\omega_1 : X(\omega_1) = r_{i_j},\ r_{i_j} \in B,\ j = 1,2,\ldots,n_B\} = \sum_{j=1}^{n_B} X^{-1}(r_{i_j})$$

või

$$X^{-1}(B) = \{\omega_1 : X(\omega_1) = r_{i_j},\ r_{i_j} \in B',\ j = 1,2,\ldots\} = \sum_{j=1}^{\infty} X^{-1}(r_{i_j})$$

vastavalt sellele, kas hulk B sisaldab lõpliku või lõpmatu osajada punktide r_i jadast.

Osutub, et hulk $X^{-1}(B)$ koosneb ülimalt loenduvast hulgast mõõtuvatest hulkadest, seega on mõõtuv.

Sellega on tõestatud järgmine teoreem:

Teoreem 5. Olgu B suvaline hulk ruumis Ω_2 ning olgu X liht- või elementaarfunktsioon. Siis hulk $X^{-1}(B)$ ruumis Ω_1 on alati mõõtuv.

Nimetatud omadusel on suur tähtsus funktsioonide uurimisel ja nendega opereerimisel. Kahjuks tuleneb see omadus aga asjaolust, et elementaarfunktsioonid omavad vaid loenduva hulga väärtusi, mis on oluliselt kitsendav eeldus funktsiooni jaoks. (Miks?) Edaspidi vaatleme funktsioone, mis säilitavad originaali mõõtuvuse vähemalt teatavate hulkade B ($B \subset \Omega_2$) korral. Sellisteks osutuvad mõõtuvad funktsioonid.

6. Mõõtuv funktsioon.

Lihtfunktsiooni nimetatakse lõpliku hulga väärtustega mõõtuvaks funktsiooniks.

Elementaarfunktsiooni nimetatakse loenduva hulga väärtustega mõõtuvaks funktsiooniks.

Defineerime nüüd üldise mõõtuva funktsiooni. Olgu ruumid $(\Omega_1, \mathcal{C}_1)$ ja $(\Omega_2, \mathcal{C}_2)$ mõõtuvad. Nimetame funktsiooni $X(\Omega_1 \to \Omega_2)$ <u>mõõtuvaks</u> parajasti siis, kui iga mõõtuva hulga $A_2 \in \mathcal{C}_2$ korral $X^{-1}(A_2)$ on $\mathcal{C}_1$-mõõtuv. (Seda definitsiooni nimetatakse mõõtuva funktsiooni deskriptiivseks definitsiooniks).

Näeme, et iga lõpliku hulga väärtustega mõõtuv funktsioon ning samuti ka iga loenduva hulga väärtustega mõõtuv funktsioon on mõõtuvad funktsioonid, sest nende korral on koguni ruumi Ω_2 iga hulga (mitte ainult mõõtuva hulga) originaal $\mathcal{C}_1$-mõõtuv. Tuleb aga kohe märkida, et mitteloenduva hulga väärtustega funktsioonide korral pole see nõue kaugeltki alati täidetud, sest kasutades seost

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{\omega_\alpha \in B} X^{-1}(\omega_\alpha),$$

näeme, et kui hulk B sisaldab mitteloenduva hulga $\{\omega_\alpha\}$ erinevaid funktsiooni X väärtusi, ei ole hulk $\bigcup_{\omega_\alpha \in B} X^{-1}(\omega_\alpha)$ kui mitteloenduva hulga mõõtuvate hulkade ühend üldiselt loenduv (kuigi erijuhtudel ta võib loenduv olla).

Osutub, et kehtivad järgmised meile edaspidiseks väga olulised teoreemid, mis esitame siin tõestuseta.[9]

<u>Teoreem 6</u>. Iga mõõtuv funktsioon on teatava lihtfunktsioonide jada piirväärtuseks.

<u>Teoreem 7</u>. Iga mittenegatiivne mõõtuv funktsioon on mittenegatiivsete lihtfunktsioonide jada piirväärtuseks.

Olgu märgitud, et mõõtuva funktsiooni võib defineerida

---

[9] Tõestus vt. näiteks [2], lk. 118.

ka kui lihtfunktsioonide jada piirväärtuse (sellist definitsiooni nimetatakse mõõtuva funktsiooni konstruktiivseks definitsiooniks). Sel juhul tuleks teoreemina tõestada mõõtuva funktsiooni omadus, mida väljendab deskriptiivne definitsioon.

Osutub aga, et deskriptiivse definitsiooni võib asendada temaga samaväärsega, mille poolt esitatav tingimus on aga nõrgem ja kergemini kontrollitav. Seda asjaolu väljendabki järgnev teoreem.

<u>Teoreem 8.</u> Olgu ruumid $(\Omega_1, \mathcal{C}_1)$ ja $(\Omega_2, \mathcal{C}_2)$ mõõtuvad; olgu $\mathcal{K}_2$ mingi selline klass ruumis Ω_2, et $\mathcal{C}(\mathcal{K}_2) = \mathcal{C}_2$ (s. t. klassi $\mathcal{K}_2$ poolt indutseeritud minimaalne σ-algebra $\mathcal{C}(\mathcal{K}_2)$ langeb ühte antud σ-algebraga $\mathcal{C}_2$). Siis on funktsioon $X(\Omega_1 \to \Omega_2)$ mõõtuv parajasti siis, kui iga hulga $A_2 \in \mathcal{K}_2$ korral $X^{-1}(A_2)$ on mõõtuv.

<u>Tõestus.</u> Tuleb tõestada, et iga mõõtuva hulga $B_2 \subset \Omega_2$ korral on hulk $X^{-1}(B_2) \subset \Omega_1$ mõõtuv.

Olgu B_2 suvaline mõõtuv hulk ruumis Ω_2, s. t. $B_2 \in \mathcal{C}_2$.

Siis peab leiduma loenduvast hulgast loenduva summa ning vahe leidmise tehetest koosnev operatsioon $\mathcal{S}$ ja loenduv hulk hulki $A_1, A_2, \ldots$ hulkade klassist $\mathcal{K}_2$ nii, et

$$B_2 = \mathcal{S}(A_1, A_2, \ldots) .$$

Kui sellist operatsiooni $\mathcal{S}$ ja hulkade jada $A_n, A_n \in \Omega_2$ ei leiduks, võiksime moodustada σ-algebra $\mathcal{C}_2^*$, mis sisaldaks kõiki σ-algebrasse $\mathcal{C}$ kuuluvaid hulki, välja arvatud hulk B_2 ja kõik hulgast B_2 loenduva hulga loenduva summa ning vahe leidmise tehete tulemusena saadud hulgad; siis $\mathcal{C}_2^* \subset \mathcal{C}_2$, mis oleks vastuolus meie eeldusega selle kohta, et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\mathcal{K}_2)$, s. t. $\mathcal{C}_2$ on minimaalne klassi $\mathcal{K}_2$ poolt indutseeritud σ-algebra.

Leiame nüüd hulga B_2 pöördkujulise $X^{-1}(B_2)$.

Kasutades teoreemi 3 saame:

$$X^{-1}(B_2) = X^{-1}\mathcal{S}(A_1, A_2, \dots) = \mathcal{S}(X^{-1}(A_1), X^{-1}(A_2), \dots).$$

Et iga hulk $X^{-1}(A_i)$ on eelduse kohaselt mõõtuv, selliseid hulki on aga $X^{-1}(B_2)$ avaldises ainult loenduv hulk, siis on ka $X^{-1}(B_2)$ mõõtuv.

Teoreem on tõestatud.

Olgu märgitud, et viimati tõestatud omadust kasutatakse reaalmuutuja funktsioonide teoorias mõõtuva funktsiooni defineerimiseks. Tõepoolest, meenutame mõõtuva reaalmuutuja funktsiooni definitsiooni.[10]

Funktsiooni $f(x)$, mis on defineeritud hulgal A, nimetatakse mõõtuvaks sellel hulgal, kui

1° hulk A on mõõtuv,

2° hulk $\{x : f(x) > a\}$ on mõõtuv iga lõpliku a korral.

Tõepoolest, käesoleval juhul

$$\Omega_1 = A \subset R; \quad \Omega_2 = R;$$

$\mathcal{C}_2$ on Boreli mõttes mõõtuvate hulkade klass ($\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}$); $\mathcal{C}_1$ on hulka A kuuluvate Boreli hulkade klass (teoreemi 1.6 kohaselt on see klass samuti σ-algebra). Teatavasti

---

[10] Vt. näiteks [6].

aga $\mathcal{B} = \mathcal{C}(\mathcal{K})$, kus $\mathcal{K} = \{(a,\infty) : a \in R\}$. (Tõestada!) Seega nõue, et hulk $\{x : f(x) > a\}$ on mõõtuv, tähendab, et hulk $f^{-1}((a,\infty))$ peab olema mõõtuv, ning sellest järeldubki teoreemi 8 põhjal funktsiooni f mõõtuvus.

Näide 3. Defineerime funktsiooni $X(R^2 \to R)$, kus $(R^2, \mathcal{B}^2)$ on 2-dimensionaalne eukleidiline ruum, $(R, \mathcal{B})$ on reaalarvude hulk. Mõõtuvateks loeme mõlemas ruumis Boreli hulki.

Olgu funktsioon X määratud seosega:

$$X(\omega_1', \omega_1'') = \omega_2 = \omega_1' + \omega_1'',$$

kui ω_1 on vektor (ω_1', ω_1'').

Leiame nüüd funktsiooni X pöördkujutise X^{-1}. Fikseerime kõigepealt suvalise punkti $\omega_2 \in R$. Siis

$$X^{-1}(\omega_2) = \{(\omega_1', \omega_1'') : \omega_1' \in (-\infty, \infty), \ \omega_1'' = \\ = \omega_2 - \omega_1'\} = \{(\omega_1', \omega_1'') : \omega_1'' \in (-\infty, \infty), \ \omega_1' = \omega_2 - \omega_1''\},$$

s. t. hulgaks $X^{-1}(\omega_2)$ on sirge ruumis R^2 (vt. joonis 62). Olgu nüüd antud hulk $A_2 = (\omega_2, \infty) \subset R$. Hulga A pöördkujutiseks saame:

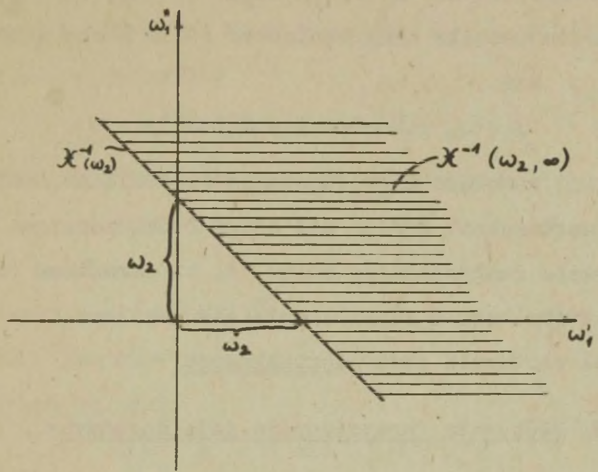
$$X^{-1}(A_2) = \{(\omega_1', \omega_1'') : \omega_1' \in (-\infty, \infty), \ \omega_1'' \in (\omega_2 - \omega_1', \infty)\} = \\ = \{(\omega_1', \omega_1'') : \omega_1'' \in (-\infty, \infty), \ \omega_1' \in (\omega_2 - \omega_1'', \infty)\},$$

s. t. saime pooltasandi ruumis R_2. Pooltasand kuulub teatavasti Boreli hulkade klassi tasandil, ja seega hulk $X^{-1}(A_2)$ on mõõtuv. Vaadeldes klassina $\mathcal{K}$ klassi $\{(a, \infty) ; a \in R\}$, saame, et $X^{-1}(A_2)$ on mõõtuv alati, kui $A_2 \in \mathcal{K}$, seega funktsioon X on teoreemi 8 põhjal mõõtuv.

Teoreem 9. Olgu antud mõõtuvad ruumid $(\Omega_1, \mathcal{C}_1)$,

$(\Omega_2, \mathcal{C}_2)$ ja $(\Omega_3, \mathcal{C}_3)$ ning mõõtuvad funktsioonid $X(\Omega_2 \to \Omega_3)$ ja $Y(\Omega_1 \to \Omega_2)$.

Siis on ka funktsioon[11] $Z = X \circ Y \ (\Omega_1 \to \Omega_3)$, mis on määratud seosega $Z(\omega_1) = X(Y(\omega_1))$, mõõtuv.



Joon. 62.

<u>Tõestus.</u> Funktsiooni Z mõõtuvuse tõestamiseks on tarvis näidata, et iga hulk $A_1 = Z^{-1}(A_3)$ on $\mathcal{C}_1$-mõõtuv. Funktsiooni Z definitsiooni põhjal avaldub hulk A_1 järgnevalt:

$$A_1 = Y^{-1}(X^{-1}(A_3)) .$$

Hulk $A_2 = X^{-1}(A_3)$ on $\mathcal{C}_2$-mõõtuv, sest X on mõõ-

---

[11] Funktsiooni $Z = X \circ Y$ nimetatakse funktsioonide X ja Y kompositsiooniks; tavalisest funktsioonide korrutisest eraldamiseks märgime selle sümboliga $X \circ Y$, kuna aga funktsiooni X mõistame funktsioonide $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$ korrutisena.

tuv funktsioon. Siis on aga ka hulk $Y^{-1}(A_2)$ $\mathcal{C}_1$-mõõtuv, sest Y on mõõtuv funktsioon. Teoreem on tõestatud.

Eeldame nüüd, et ruumis Ω_1 on defineeritud ka mõõt, s. t. vaatleme ruume $(\Omega_1, \mathcal{C}_1, \mu_1)$ ja $(\Omega_2, \mathcal{C}_2)$.

Kahte funktsiooni $X_1(\Omega_1 \to \Omega_2)$ ja $X_2(\Omega_1 \to \Omega_2)$ loeme ekvivalentseteks ning tähistame selle seose sümboliga $X_1 \sim X_2$, kui

$$\mu(\omega_1 : X_1(\omega_1) \neq X_2(\omega_1)) = 0 .$$

Edaspidi vaatleme mitte üksikuid funktsioone, vaid mõistame funktsiooni $X(\omega)$ all kõigi funktsiooniga $X(\omega)$ ekvivalentsete funktsioonide hulka, s. t. samastame omavahel kõik ekvivalentsed funktsioonid ehk vaatleme funktsioonide asemel vastavaid ekvivalentsiklasse.

7. Mõõtuvate funktsioonide jada koonduvus.

Kui $\Omega_2 = R$, siis on kõik funktsiooni $X(\Omega_1 \to \Omega_2)$ väärtused reaalsed. Kõige lihtsam on sel juhul koonduvus defineerida koonduvusena kõikjal (igas punktis). Öeldakse, et funktsioonide jada $X_n(\omega_1)$ koondub funktsiooniks $X(\omega_1)$, kui reaalarvude $X_n(\omega_1)$ jada koondub reaalarvuks $X(\omega_1)$ iga $\omega_1 \in \Omega_1$ korral.

Olgu märgitud, et nõue, olgu ruum Ω_2 reaalarvude ruum, pole siinjuures oluline. Tarvilik on üksnes, et ruumi Ω_2 elementide hulgas on mingil viisil defineeritud koonduvus. Edaspidi alati, kui räägitakse koonduvusest, ilma selle liiki juurde märkimata, mõistetakse koonduvust kõikjal.

Osutub, et koonduvus kõikjal on väga range nõue; sageli piisab nõrgemate tingimustega määratud koonduvustestki oluliste tulemuste saavutamiseks. Seetõttu defineerime veel mõningad koonduvuse mõisted.

Mõõtuvate funktsioonide jada $X_n(\omega)$ kohta öeldakse, et ta koondub mõõtuvaks funktsiooniks $X(\omega)$ <u>mõõdu järgi</u>, kui iga $\varepsilon > 0$ korral

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0 .$$

Mõõdu järgi koonduvust tähistame järgmiselt:

$$X(\omega) = \mu - \lim X_n(\omega) ,$$

ehk

$$X_n(\omega) \xrightarrow{\mu} X(\omega) .$$

Kehtib järgmine teoreem:

<u>Teoreem 10</u>. Kui

$$X(\omega) = \mu - \lim X_n(\omega) ,$$

ja

$$Y(\omega) = \mu - \lim X_n(\omega) ,$$

siis

$$X(\omega) \sim Y(\omega) .$$

(Tõestada!)

Defineerime veel ühe koonduvuse mõõtuvate funktsioonide ruumis. Selleks tuleb meil eeldada, et ruum Ω_2 on täielik.

Ruumi Ω_2 nimetatakse täielikuks, kui selles igal fundamentaaljadal ω_n eksisteerib piirväärtus, s. t. sellest, et vastavalt igale arvule $\varepsilon > 0$ leidub $N(\varepsilon)$ nii, et kehtib seos

$$|\omega_n - \omega_{n+m}| < \varepsilon ,$$

kui $n > N(\varepsilon)$, $m=1,2,\ldots$, järeldub jada ω_n piirväärtuse ω eksisteerimine.

Vaatleme mõõtuvate funktsioonide jada $X_n(\Omega_1 \to \Omega_2)$. Jada $X_n(\omega)$ koonduvushulgaks nimetame hulka S:

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \left\{ \omega : |X_n(\omega) - X_{n+m}(\omega)| < \frac{1}{k} \right\},$$

s. o. kõigi selliste punktide hulk, mille korral iga k jaoks leidub selline n, et iga m korral on täidetud võrratus

$$|X_n(\omega) - X_{n+m}(\omega)| < \frac{1}{k} .$$

Kuna kõik funktsioonid $X_n(\omega)$ on mõõtuvad, on ka hulk

$$\left\{ \omega : |X_n(\omega) - X_{n+m}(\omega)| < \frac{1}{k} \right\}$$

C_1-mõõtuv; et hulk S on moodustatud loenduvast hulgast mõõtuvatest hulkadest ühendi ja ühisosa leidmise teel, siis on ka hulk S C_1-mõõtuv.

Nimetame hulka $\Omega_1 \setminus S = D$ jada $X_n(\omega)$ hajuvushulgaks. Ka jada hajuvushulk D on C_1-mõõtuv. Me ütleme, et funktsioonide jada $X_n(\omega)$ koondub peaaegu kõikjal, kui selle jada korral kehtib võrdus:

$$\mu_1(D) = 0 ,$$

kus μ_1 on mõõt ruumis (Ω_1, C_1, μ_1).

Kuna ruum Ω_2 on täielik, siis eksisteerib peaaegu kõikjal koonduval jadal ka piirväärtus $X(\omega)$, mille võime defineerida näiteks järgnevalt:

$$\begin{cases} X(\omega) = \lim\limits_{n \to \infty} X_n(\omega) , & \omega \in S , \\ X(\omega) = 0 , & \omega \in D . \end{cases} \tag{6}$$

Nagu näeme, määrab jada $X_n(\omega)$ funktsiooni $X(\omega)$ üksnes hulgal S, kuna hulgal D võib $X(\omega)$ valida meelevaldselt; ükskõik kuidas me funktsiooni $X(\omega)$ ka ei defineeriks hulgal D, saame alati funktsiooni, mis on ekvivalentne seosega (6) defineeritud funktsiooniga.

Funktsiooni X nimetame peaaegu lõplikuks, kui

$$\mu_1\{\omega: |X(\omega)| = \infty\} = 0 .$$

Esitame veel mõningad olulised tulemused, kuid tõestusteta, kuna kõik tõestused on sarnased vastavate tõestustega reaalmuutuja funktsiooniteoorias.

Teoreem 11. Kui mõõt μ_1 on lõplik ja peaaegu lõplike funktsioonide jada $X_n(\omega)$ koondub peaaegu kõikjal peaaegu lõplikuks piirväärtuseks $X(\omega)$, siis koondub see jada samaks piirväärtuseks ka mõõdu järgi.

Teoreem 12. Kui jada $X_n(\omega)$ koondub mõõdu järgi, siis leidub tal osajada $X_{n_k}(\omega)$, mis koondub peaaegu kõikjal.

Seega näeme, et lõpliku mõõdu korral on koonduvus peaaegu kõikjal tugevam kui koonduvus mõõdu järgi: koonduvusest peaaegu kõikjal järeldub koonduvus mõõdu järgi, vastupidi aga mitte.

8. Ülesandeid.

1. Olgu meil defineeritud funktsioon $X(\Omega_1 \to \Omega_2)$. Fikseerime mingil viisil punkti ω_2. Millega võrdub siis $X^{-1}(\omega_2)$, kui ei leidu sellist punkti ω_1, et $X(\omega_1) = \omega_2$?

2. Olgu Ω_1 loenduv hulk, Ω_2 mitteloenduv hulk. Kas leidub funktsiooni $X(\omega_1)$, mis kujutab ruumi Ω_1, ruumiks Ω_2 ?

3. Missugune peab olema funktsioon $X(\omega)$ selleks, et pöördkujutis $X^{-1}(A)$ oleks tavalises mõttes ühene funktsioon (s. t. ühene punkti funktsioon)? Mida võiks sel korral öelda hulkade Ω_1 ja Ω_2 võimsuse kohta?

4. Olgu funktsioon $X(\omega)$ üksühene. Missugune peab siis olema ruumide Ω_1 ja Ω_2 võimsuste vahekord?

5. Kas pöördkujutise abil oleks võimalik indutseerida mõõtu ka ruumis Ω_1 mõõdu järgi ruumis $(\Omega_2, \mathcal{C}_2, \mu_2)$?

6. Kas klassikalises analüüsis tuntud elementaarfunktsioon võiks olla ühtlasi elementaarfunktsioon p. 5 mõttes?

7. Tõestada, et $\sin x$ on mõõtuv funktsioon.

8. Tõestada, et xy on mõõtuv funktsioon.

9. Mille poolest erineb seosega (3) defineeritud σ-algebra $\mathcal{C}_2$ hulkade klassist $\mathcal{K}_2 = \{A_2 : A_2 = X(A_1),\ A_1 \in \mathcal{C}_1\}$? Kas $\mathcal{K}_2$ on σ-algebra? Põhjendada!

§ 4. Integraal.

1. Lihtfunktsiooni integraal.

Olgu meil ruumis $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ defineeritud lihtfunktsioon $X(\Omega \to R)$:

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} r_i I_{A_i}(\omega) .$$

Integraali I funktsioonist $X(\omega)$ mõõdu μ järgi üle kogu ruumi Ω defineerime seosega:

$$I = \int_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega) = \int_{\Omega} X d\mu = \sum_{j=1}^{n} r_j \mu(A_j) . \qquad (1)$$

Integraal on arv, ning juhul, kui mõõt μ on lõplik, siis

$$|I| < \infty .$$

Integraali üle mõõtuva hulga A defineerime seosega:

$$\int_A X(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega X(\omega) I_A(\omega)\mu(d\omega) . \qquad (2)$$

Näeme, et integraalil on järgmised lihtsad omadused:

1° Kui $X(\omega) \geqslant 0$, siis $\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega) \geqslant 0$ (monotoonsus) ;

2° $\int_\Omega kX(\omega)\mu(d\omega) = k\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega)$ (homogeensus) ;

3° $\int_\Omega [X(\omega) + Y(\omega)]\mu(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega) + \int_\Omega Y(\omega)\mu(d\omega)$ (aditiivsus, ka distributiivsus). (Tõestada!)

Seosest 3° saame teise aditiivsuse omaduse, kasutades teoreemi 3.4, mille kohaselt

$$XI_{A\cup B} = X(I_A + I_B) = XI_A + XI_B , \quad \text{kui} \quad A\cap B \neq 0 .$$

Seose (2) rakendamine saadud võrduse mõlemale poolele annabki omaduse 4°:

4° $\int_{A\cup B} X(\omega)\mu(d\omega) = \int_A X(\omega)\mu(d\omega) + \int_B X(\omega)\mu(d\omega)$, kui $A\cap B = \emptyset$.

Seostest 1° ja 3° tuleneb ka teine monotoonsuse omadus:

5° Kui $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$, siis

$$\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega) \geqslant \int_\Omega Y(\omega)\mu(d\omega) . \quad \text{(Tõestada!)}$$

2. Mittenegatiivse mõõtuva funktsiooni integraal.

Selleks, et defineerida integraal mistahes mõõtuvast funktsioonist, kasutame asjaolu, et iga mittenegatiivne mõõtuv funktsioon on avaldatav lihtfunktsioonide $X_n(\omega)$ mittekahaneva jada piirväärtusena[12] (vt. teoreem 3.7).

$$X(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \; , \; X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega) \; .$$

Tõestame kõigepealt mõningad lemmad.

<u>Lemma 1</u>. Olgu $X_n(\omega)$ $(n=1,2,\ldots)$ mittekahanev mittenegatiivsete lihtfunktsioonide jada,[12]

$$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \geqslant Y(\omega) \; ,$$

kus $Y(\omega)$ on mittenegatiivne lihtfunktsioon. Siis

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega) \mu(d\omega) \geqslant \int_{\Omega} Y(\omega) \mu(d\omega) \; . \qquad (3)$$

<u>Tõestus</u>. Eeldame, et $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i} r_i$, kusjuures olgu $0 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_n$.

Olgu $\mathcal{E}$ suvaline positiivne arv. Defineerime ruumis hulkade B_m jada:

$$B_m = \left\{ \omega : X_n(\omega) \geqslant Y(\omega) - \mathcal{E} \; , \; n \geqslant m \right\} \; (m=1,2,\ldots) \; .$$

Kuna eelduse põhjal $X_n(\omega)$ on mittekahanev, siis

$$B_m \subset B_{m+1} \; , \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \Omega \; ,$$

sest iga punkti ω_* jaoks leidub N_* nii, et $X_n(\omega_*) - Y(\omega_*) > -\mathcal{E}$, kui $n > N_*$, vastavalt meie eeldusele.

Kasutades siis monotoonse jada piirväärtuse avaldist (vt. teoreem 1.1), saame

$$\lim_{m \to \infty} B_m = \Omega \; .$$

---

[12] Teatavasti on reaalarvude vallas igal tõkestatud mittekahaneval jadal lõplik piirväärtus; tõkestamata mittekahaneva jada piirväärtuseks võime aga lugeda $+\infty$, seega on igal mittekahaneval jadal piirväärtus (vt. näiteks [7]).

Kui $\mu(\Omega) < \infty$, kehtib mõõdu σ-aditiivsuse tõttu ka võrdus

$$\lim_{m \to \infty} \mu(B_m) = \mu(\Omega),$$

millest järeldub seos:

$$\lim_{m \to \infty} \mu(\Omega - B_m) = 0 .$$

Kasutades integraali omadusi 4^o ja 1^o, saame võrratuse:

$$\int_{\Omega} X_n(\omega)\mu(d\omega) \geqslant \int_{B_m} X_n(\omega)\mu(d\omega) ;$$

integraali omaduse 5^o ja hulga B_m definitsiooni põhjal järeldub, et iga $n < m$ korral kehtib võrratus

$$\int_{B_m} X_n(\omega)\mu(d\omega) \geqslant \int_{B_m} (Y(\omega) - \varepsilon)\mu(d\omega) = \int_{B_m} Y(\omega)\mu(d\omega) - \varepsilon\mu(B_m) .$$

Teisendame saadud integraali, kasutades integraali definitsiooni ja omadust 3^o.

Et aga $\int_{B_m} Y(\omega)\mu(d\omega) \geqslant \int_{\Omega} Y(\omega)\mu(d\omega) - r_n\mu(\Omega - B_m)$,

siis saame kokkuvõttes:

$$\int_{\Omega} Y(\omega)\mu(d\omega) - \int_{\Omega} X_n(\omega)\mu(d\omega) \leqslant \varepsilon\mu(\Omega) + r_n\mu(\Omega - B_m) ,$$

ning kui $\varepsilon \to 0$, $m \to \infty$, järeldubki siit seos (3).

<u>Lemma 2</u>. Kui $X_n(\omega)$ ja $Y_n(\omega)$ on mittekahanevad mittenegatiivsete lihtfunktsioonide jadad ja[13]

$$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = \lim_{n \to \infty} Y_n(\omega) \text{ iga } \omega \in \Omega \text{ korral} , \quad (4)$$

---

[13] Vaadeldavate piirväärtuste eksisteerimine järeldub eelneval leheküljel tehtud märkusest.

siis ka

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega)\mu(d\omega) = \lim_{m \to \infty} \int_{\Omega} Y_m(\omega)\mu(d\omega) .$$

<u>Tõestus</u>. Et

$$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \leqslant Y_m(\omega) ,$$

siis lemma 1 põhjal

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega)\mu(d\omega) \leqslant \int_{\Omega} Y_m(\omega)\mu(d\omega) .$$

Teostame nüüd võrratuse paremal poolel piirprotsessi $m \to \infty$.

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega)\mu(d\omega) \leqslant \lim_{m \to \infty} \int_{\Omega} Y_m(\omega)\mu(d\omega) ;$$

Vahetades jadad $X_n(\omega)$ ja $Y_m(\omega)$ saame vastupidise võrratuse. Mõlemaid võrratusi kokku võttes saamegi võrduse (4).

Anname nüüd mittenegatiivse funktsiooni integraali definitsiooni.

Mõõtuva mittenegatiivse funktsiooni $X(\omega)$ <u>integraaliks üle kogu ruumi Ω</u> nimetame suurust

$$\int_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega) = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega)\mu(d\omega) ,$$

kus $X_n(\omega)$ on suvaline mittekahanev mittenegatiivsete lihtfunktsioonide jada, mis koondub funktsiooniks $X(\omega)$.

See definitsioon on korrektne, sest lemma 2 põhjal ei sõltu integraali definitsioon mittekahaneva mittenegatiivsete lihtfunktsioonide jada konkreetsest valikust. (Selgitada!)

Näeme, et mittenegatiivse lihtfunktsiooni korral langeb definitsioon ühte varemtooduga, sest iga lihtfunktsioon on esitatav jadana, kus alates n-ndast elemendist on jada konstantne. (Tõestada, et elementaarfunktsiooni integraali võime esitada lõpmatu summana $\sum_{j=1}^{\infty} r_j\mu(A_j)$, kui kõik kordajad r_j on mittenegatiivsed!)

3. Suvalise mõõtuva funktsiooni integraal.

Selleks, et defineerida integraal mistahes mõõtuvast funktsioonist $X(\omega)$, defineerime vastavalt funktsioonile $X(\omega)$ kaks mittenegatiivset funktsiooni $X^+(\omega)$ ja $X^-(\omega)$:

$$X^+(\omega) = X(\omega) I_{\{\omega: X(\omega) \geqslant 0\}}, \quad X^+(\omega) \geqslant 0;$$

$$X^-(\omega) = -X(\omega) I_{\{\omega: X(\omega) < 0\}}, \quad X^-(\omega) \geqslant 0.$$

Mõlemad funktsioonid $X^+(\omega)$ ja $X^-(\omega)$ on mõõtuvad. (Miks?)

Ilmselt $X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$ ning kuna need on mõlemad mittenegatiivsed mõõtuvad funktsioonid, siis eksisteerivad ka integraalid

$$I^+ = \int_\Omega X^+(\omega)\mu(d\omega) \quad \text{ja} \quad I^- = \int_\Omega X^-(\omega)\mu(d\omega).$$

Suuruste I^+ ja I^- jaoks on järgnevad võimalused:

1) I^+ ja I^- on mõlemad lõplikud. Siis me ütleme, et funktsioon $X(\omega)$ on <u>integreeruv</u>, ja defineerime $\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega)$ seosega:

$$\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega) = I^+ - I^-.$$

Sel juhul on funktsiooni $X(\omega)$ integraal lõplik.

2) Üks suurustest I^+ ja I^- on lõplik, teine lõpmatu. Siis defineerime $\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega)$ järgnevalt:

$$\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega) = \begin{cases} \infty, & \text{kui } I^+ = \infty, \\ -\infty, & \text{kui } I^- = \infty. \end{cases}$$

3) I^+ ja I^- on mõlemad lõpmatud. Sel juhul me ütleme, et funktsioonil $X(\omega)$ ei eksisteeri integraali. Funktsiooni $X(\omega)$ nimetame juhtudel 2) ja 3) mitteintegreeruvaks.

Näeme, et igal integreeruval funktsioonil eksisteerib lõplik integraal. Erijuhul, kui $X(\omega)$ on lihtfunktsioon, on ka $X^+(\omega)$ ja $X^-(\omega)$ lihtfunktsioonid, ning I^+ ja I^- on määratavad lihtfunktsiooni integraalina. Erijuhul säilib punktis 1 antud definitsioon.

Siit saame leida ka avaldise elementaarfunktsiooni integraali leidmiseks. Sel juhul tähistame

$$r_i^+ = \begin{cases} r_i, & \text{kui } r_i > 0, \\ 0, & \text{kui } r_i \leq 0; \end{cases} \qquad r_i^- = \begin{cases} -r_i, & \text{kui } r_i < 0, \\ 0, & \text{kui } r_i \geq 0. \end{cases}$$

Siis $I^+ = \sum_{i=1}^{\infty} r_i^+ I_{A_i}$; $I^- = \sum_{i=1}^{\infty} r_i^- I_{A_i}$.

Valides mittekahanevaks lihtfunktsioonide jadaks rea $\sum_{i=1}^{\infty} r_i^+ I_{A_i}$ osasummade jada, leiame, et

$$I^+ = \sum_{i=1}^{\infty} r_i^+ \mu(A_i), \quad I^- = \sum_{i=1}^{\infty} r_i^- \mu(A_i)$$

ning seega

$$\int_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i^+ \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{\infty} r_i^- \mu(A_i),$$

kui rida $\sum_{i=1}^{\infty} r_i \mu(A_i)$ on absoluutselt koonduv; vastasel korral on funktsioonil kas lõpmatu integraal või ei eksisteeri integraali üldse. (Miks?)

4. Absoluutne integreeruvus.

Arvu $I^+ + I^-$ nimetame funktsiooni $X(\omega)$ absoluutseks integraaliks. Nagu näeme, eksisteerib see alati (olles lõplik või lõpmatu). Kui funktsiooni absoluutne integraal on lõplik, ütleme, et funktsioon on absoluutselt integreeruv.

Niisiis järeldub funktsiooni integreeruvusest tema absoluutne integreeruvus ja vastupidi. Kui funktsioon ei ole integreeruv, on tema absoluutse integraali väärtuseks $+\infty$.

5. Määratud integraali omadusi.

Määratud integraali võime defineerida ka üle mingi mõõtuva hulga $A \subset \Omega$; selleks tuleb vaid integraalsummas asendada iga hulk A_j ühisosaga $A_j \cap A$, sisuliselt tähendab see, et me integreerime funktsiooni $X(\omega) I_A$ (vt. seost (2)). Seda kasutades saamegi anda üldise definitsiooni integraali jaoks üle mingi mõõtuva hulga A:

$$\int_A X(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, I_A \mu(d\omega) . \qquad (5)$$

On ilmne, et alati, kui eksisteerib integraal üle kogu ruumi, eksisteerib ka integraal üle selle ruumi mistahes mõõtuva hulga. (Miks?) Integreeruva funktsiooni korral on integraal üle iga hulga A lõplik.

Määratud integraali omadused, mis olid tuletatud punktis 1 lihtfunktsiooni jaoks, kehtivad ka üldjuhul. Selles on võimalik veenduda, kasutades integraali defineerivat piirprotsessi.

1° Kui $X(\omega) \geqslant 0$, siis $\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega) \geqslant 0$, 2° $\int\limits_{\Omega} kX(\omega)\mu(d\omega) = k\int\limits_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega)$,

3° $\int\limits_{\Omega} (X(\omega)+Y(\omega))\mu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega)+\int\limits_{\Omega} Y(\omega)\mu(d\omega)$,

4° $\int\limits_{A\cup B} X(\omega)\mu(d\omega) = \int\limits_{A} X(\omega)\mu(d\omega)+\int\limits_{B} X(\omega)\mu(d\omega)$,

kui $A\cap B = \emptyset$,

5° Kui $X(\omega)\geqslant Y(\omega)$, siis

$$\int\limits_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega)\geqslant\int\limits_{\Omega} Y(\omega)\mu(d\omega) .$$

(Tõestada need omadused!)

Lisaks ülalmärgitud omadustele märgime veel mõningaid. Kasutades funktsiooniteoorias tavalist kokkulepet

$$\infty \cdot 0 = 0 \tag{6}$$

saame tõestada ka järgmise integraali omaduse:

6° Kui $\mu(A) = 0$, siis

$$\int\limits_{A} X(\omega)\mu(d\omega) = 0 .$$

Kehtib ka teatud mõttes vastupidine omadus:

7° Kui $X(\omega)\geqslant 0$ ja $\mu(X > 0) > 0$,

siis $\int\limits_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega) > 0$.

(Tõestada!)

Erilise tähtsusega integraali teoorias ja selle rakendustes (muuhulgas ka tõenäosusteoorias) on järgmised, nn. integraali <u>pidevuse</u> omadused. Neid omadusi kasutades saab lihtsalt tõestada ka integraali omadused 1°-5°. Esitame siin pidevuse omadused tõestuseta, kuna tõestused sarnanevad vastavatele tõestustele reaalmuutuja funktsioonide teoorias (vt. näiteks [6]).

8° Koondugu mõõtuvate funktsioonide jada $X_n(\omega)$ mõõdu järgi funktsiooniks $X(\omega)$. Kui leidub integreeruv funktsioon $Y(\omega)$ nii, et

$$|X_n(\omega)| \leqslant Y(\omega) \qquad (n=1,2,\ldots;\ \omega \in \Omega),$$

siis

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega)\mu(d\omega) = \int_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega).$$

9° Kui mõõtuvate ja mittenegatiivsete funktsioonide kasvav jada

$$X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega) \leqslant \ldots \leqslant X_n(\omega) \leqslant \ldots$$

koondub piirfunktsiooniks $X(\omega)$ peaaegu kõikjal, siis

$$\int_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega) = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega)\mu(d\omega).$$

6. Ülesandeid.

1. Tõestada, et kui $X(\omega) \leqslant 0$, siis ka $\int_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega) \leqslant 0$.

2. Tõestada, et iga mõõtuv mittenegatiivne funktsioon on avalduv mittenegatiivsete lihtfunktsioonide mittekahaneva jada piirväärtusena, kui on teada, et iga mõõtuv funktsioon avaldub lihtfunktsioonide jada piirväärtusena.

3. Kas lihtfunktsioonide integraalide jada omab alati piirväärtust? Millega saab seda põhjendada?

4. Kas mittekahanev reaalarvude jada koondub alati?

5. Kus kasutatakse lemmasid 1 ja 2 ?

6. Missuguse tulemusega matemaatilises analüüsis (Riemanni integraalide korral) sarnanevad lemmad 1 ja 2 ?

7. Missugune omadus on rangem, kas integreeruvus või absoluutne integreeruvus? Integraali või absoluutse integraali olemasolu? Kuidas on vastav vahekord matemaatilises analüüsis?

8. Võttes ruumiks Ω arvsirge R, saame analüüsis tuntud funktsioonid. Missugune vahekord on äsjadefineeritud integraalidel Riemanni integraalidega?

9. Millega võrdub

$$\int_A X(\omega)\mu(d\omega) ,$$

kui $X(A) = \infty$, $\mu(A) = 0$? Miks?

§ 5. M ä ä r a m a t a   i n t e g r a a l .

1. <u>Määramata integraali mõiste</u>.

Olgu meil fikseeritud mingi mõõtuv funktsioon $X(\omega)$ ruumist $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ ruumi R. Eeldame, et eksisteerib

$$I = \int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega) .$$

Seame igale mõõtuvale hulgale $A \subset \Omega$ vastavusse arvu

$$\varphi(A) = \int_A X(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega X(\omega) I_A \mu(d\omega). \qquad (1)$$

Sel viisil oleme me ruumis Ω defineerinud hulgafunktsiooni $\varphi(A)$, mida nimetame <u>määramata integraaliks</u> funktsioonist $X(\omega)$.

Osutub, et määramata integraal eksisteerib alati, kui eksisteerib määratud integraal

$$\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega) ,$$

kusjuures alati, kui $X(\omega)$ on integreeruv, on määramata integraal lõplik hulgafunktsioon.

Määramata integraal säilitab kõik määratud integraali omadused.

Seega näeme muuhulgas, et määramata integraal on aditiivne hulgafunktsioon. Edasi pakub huvi, kas määramata integraal on ka σ-aditiivne. Tõestame teoreemi:

Teoreem 1. Määramata integraal on σ-aditiivne hulgafunktsioon.

Vaatleme kõigepealt olukorda, kus $X(\omega)$ on mittenegatiivne funktsioon.

Olgu $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$.

Siis $I_A = \sum_{i=1}^{\infty} I_{A_i}$ ja

$$X(\omega)\, I_A = X(\omega) \sum_{i=1}^{\infty} I_{A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} X(\omega) I_{A_i} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} X(\omega) I_{A_i}.$$

Tähistame $\sum_{i=1}^{n} X(\omega)\, I_{A_i} = X_n(\omega)$; ilmneb, et jada $X_n(\omega)$ on mittenegatiivsete funktsioonide mittekahanev jada, mis koondub funktsiooniks $X(\omega)\, I_A$. Integraali omaduse 9° põhjal siis

$$\int_{\Omega} \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \mu(d\omega) = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega) \mu(d\omega). \qquad (2)$$

Arvestades aga, et

$$\int_{\Omega} \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} X(\omega)\, I_A \mu(d\omega) = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} X(\omega) \mu(d\omega),$$

kuid $\int_{\Omega} X_n(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} X(\omega) \mu(d\omega)$,

annabki seos (2) teoreemi väite tõestuse mittenegatiivse funktsiooni $X(\omega)$ korral. Üleminek suvalise $X(\omega)$ juhule ei valmista enam raskusi. (Tõestada!)

2. Määramata integraal kui mõõt.

Nägime, et määramata integraal on alati σ-aditiivne hulgafunktsioon. Pidades silmas integraalide omadusi näeme, et mittenegatiivse integreeruva funktsiooni määramata integraal $\varphi(A)$ on alati mõõt. (Tõestada!) Siinjuures paneme tähele, et sellega on meil ruumis Ω defineeritud (lisaks varem defineeritud mõõdule μ, mille abil üldse integraal avaldubki) veel teine mõõt φ. Meie edasiseks ülesandeks on uurida samas ruumis erineval viisil defineeritud mõõtude vahekordi.

Ütleme, et mõõtuvas ruumis $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ hulkade klassil $\mathcal{C}$ defineeritud hulgafunktsioon φ on μ-pidev, kui ta omandab väärtuse 0 igal hulgal A, mille μ-mõõt on 0, s. t., kui seosest

$$\mu(A) = 0$$

järeldub seos

$$\varphi(A) = 0 .$$

Juhul, kui ruumiks $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ valida sirge $(R, \mathcal{B}, \mu)$ (μ on Lebesgue'i mõõt), siis langeb μ-pidevus ühte matemaatilises analüüsis tuntud absoluutse pidevusega (vt. näiteks [6]).

Integraali omadusest 6° järeldub, et määramata integraal on μ-pidev hulgafunktsioon.

3. Radon-Nikodymi teoreem.

On huvitav märkida, et kehtib ka vastupidine tulemus: iga μ-pidev σ-aditiivne hulgafunktsioon avaldub tingimata mingi funktsiooni määramata integraalina mõõdu μ järgi.

Teoreem 2. Olgu antud mõõduga ruum $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$. Iga μ-pidev, σ-aditiivne ja lõplik hulgafunktsioon $\varphi(A)$ on teatava lõpliku funktsiooni $X(\omega)$ määramata integraaliks (1)

$$\varphi(A) = \int_A X(\omega)\mu(d\omega) ,$$

ning funktsiooni $X(\omega)$ nimetatakse sel juhul hulgafunktsiooni tuletiseks mõõdu μ järgi:

$$X(\omega) = \frac{d\varphi}{d\mu}(\omega) . \qquad (3)$$

Olgu märgitud, et tuletis mõõdu järgi eksisteerib ainult μ-pidevatel hulgafunktsioonidel.

Radon-Nikodymi teoreemi täielikku tõestust me siin ei esita, küll aga näitame, et seosega (3) määratud funktsioon $X(\omega)$ on ühene (ekvivalentsi täpsuseni).

Tõepoolest, oletame, et eksisteerib kaks funktsiooni $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$ nii, et iga mõõtuva hulga A korral kehtib võrdus

$$\varphi(A) = \int_A X(\omega)\mu(d\omega) = \int_A Y(\omega)\mu(d\omega) ,$$

$$\mu(\omega : X(\omega) \neq Y(\omega)) > 0 .$$

Et $\mu(\omega : X(\omega) \neq Y(\omega)) =$

$$= \mu(\omega : X(\omega) > Y(\omega)) + \mu(\omega : X(\omega) < Y(\omega)) ,$$

siis peab kindlasti olema kas $\mu(\omega : X(\omega) > Y(\omega)) > 0$ või $\mu(\omega : X(\omega) < Y(\omega)) > 0$.

Oletame, et kehtib esimene võrratus. Vaatleme funktsiooni $X(\omega) - Y(\omega)$, mis on samuti mõõtuv funktsioon ja hulka $B = \{\omega : X(\omega) > Y(\omega)\}$. Siis integraali monotoonsuse tõttu (omadus 7°):

$$\int_B [X(\omega) - Y(\omega)]\mu(d\omega) > 0 ,$$

see aga tähendab, et

$$\int_B X(\omega)\mu(d\omega) > \int_B Y(\omega)\mu(d\omega) ,$$

mis on aga vastuolus meie eeldusega. Tõestada teoreem juhul, kui

$$\mu(X(\omega) > Y(\omega)) = 0 .$$

4. Lebesgue'i lahutus.

Mõõtusid μ ja ν nimetatakse <u>teineteise suhtes singulaarseteks</u> (sümboolselt: $\mu \perp \nu$), kui ruumi Ω saab esitada kahe hulga Ω_μ ja Ω_ν summana, $\Omega_\mu \cap \Omega_\nu = \emptyset$ nii, et

$$\nu(\Omega_\mu) = 0 ; \quad \mu(\Omega_\nu) = 0 .$$

Radon-Nikodymi teoreemile saame anda järgneva üldistuse Lebesgue'i teoreemi näol:

<u>Lebesgue'i teoreem</u>: Olgu ruumis $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ defineeritud hulgafunktsioon $\mu(A)$ hulkade klassil $\mathcal{C}$. Siis leiduvad μ-pidev hulgafunktsioon $\psi(A)$ ja μ suhtes singulaarne hulgafunktsioon $\nu(A)$ nii, et

$$\varphi(A) = \psi(A) + \nu(A) .$$

Hulgafunktsioonid $\psi(A)$ ja $\nu(A)$ on üheselt määratud. Kui $\varphi(A)$ on lõplik mõõt, siis on ka $\psi(A)$ ja $\nu(A)$ lõplikud mõõdud. Ühtlasi leidub ruumis Ω funktsioon $f(\omega)$ nii, et

$$\psi(A) = \int_A f(\omega)\mu(d\omega) ,$$

seega

$$\varphi(A) = \int_A f(\omega)\mu(d\omega) + \nu(A) .$$

Kui $\varphi(A)$ on mõõt, on $f(\omega)$ mittenegatiivne ja mõõdu μ suhtes integreeruv.

Näeme, et Radon-Nikodymi teoreem on Lebesgue'i teoreemi erijuhuks μ-pideva funktsiooni $\varphi(A)$ korral.

Tõestame Lebesgue'i lahutuse ühesuse. Oletame, et eksisteerib kaks lahutust

$$\varphi(A) = \psi(A) + \nu(A)$$

ja

$$\varphi(A) = \psi'(A) + \nu'(A) ,$$

kus $\psi(A)$ ja $\psi'(A)$ on μ-pidevad, $\nu(A)$ ja $\nu'(A)$ on μ-singulaarsed.

Ilmselt on siis ka $\psi(A) - \psi'(A)$ μ-pidev mõõt, $\nu'(A) - \nu(A)$ aga μ-singulaarne mõõt. Näeme, et

$$\psi(A) - \psi'(A) = \nu'(A) - \nu(A) ,$$

seega μ-pidev mõõt võrdub μ-singulaarsega. Siit järeldub aga, et see mõõt on samaselt võrdne nulliga (kuna ta ühelt poolt peab võrduma nulliga kõigil hulkadel, mille μ-mõõt on võrdne nulliga, teiselt poolt aga ka kõigil hulkadel, mille μ-mõõt erineb nullist). Järelikult

$$\psi(A) \equiv \psi'(A) \quad \text{ja} \quad \nu(A) = \nu'(A) ,$$

mida meil oligi tarvis tõestada.

Ülejäänud osa Lebesgue'i teoreemist me ei tõesta. Tõestuse võib leida näiteks õpikust [2] või [5].

5. Ülesandeid.

1. Milline analoogia on punktis 1 defineeritud määramata integraali ja analüüsis tuntud määramata integraali vahel? Milline on erinevus?

2. Kas funktsioonil, mis ei ole integreeruv, võib määramata integraal eksisteerida? Milline see integraal siis on?

3. Avaldada integraal:

$$\int_{A \cup B} X(\omega)\mu(d\omega)$$

integraalide kaudu, mille integreerimispiirkondadeks on A, B ja $A \cap B$; A ja B on suvalised.

4. Tõestada integraali σ-aditiivsus suvalise mõõtuva funktsiooni korral!

5. Olgu meil ruumiks Ω reaalarvude hulk $(R,\mathcal{B},\mu)$, kus μ on Lebesgue'i mõõt. Defineerime siin mõõdu φ seosega: $\varphi(A) = k$, kui leidub k täisarvu $j_1, j_2, \dots, j_k \in A$. Missugune on mõõtude φ ja μ vahekord?

6. Olgu ruumis $(R,\mathcal{B},\mu)$ defineeritud mõõt $\varphi([a,b])$ seosega

$$\varphi[c,d] = \max\left(0\ ,\ \frac{\min(d,b)-\max(a,c)}{b-a}\right).$$

Kas φ on μ-pidev? Kas μ on φ-pidev?

7. Olgu c konstant. Defineerime mõõdu $\varphi(A)$:

$$\varphi(A) = c\mu(A).$$

Missugune on mõõtude φ ja μ vahekord?

8. Leida $\frac{d\varphi}{d\mu}$ ja $\frac{d\mu}{d\varphi}$ ülesannetes 5 - 7, kui need eksisteerivad.

§ 6. Ruumide otsekorrutis.

1. Otsekorrutise mõiste.

Olgu antud n ruumi $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, vastavalt üldelementidega $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, $\omega_i \in \Omega_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Hulki ruumis Ω_i tähistame vastavalt sümbolitega $A_i, B_i, \ldots$ ... .

Defineerime ruumide $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ otsekorrutise $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n = \Omega$ kui kõigi järjestatud punktihulkade (korteežide) $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ hulga, kus $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Märgime siin, et ruumide otsekorrutist nimetatakse ka Descartes'i (Cartesiuse) korrutiseks.

Ruumi Ω kuuluvad hulkadena ka kõikvõimalikud hulgad

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n = \left\{ (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in A_i \subset \Omega_i ; i=1,\ldots,n \right\} ; \quad (1)$$

selliseid hulki nimetatakse risttahukateks ruumis Ω. Juhul, kui mõni hulkadest A_i langeb ühte kogu ruumiga Ω_i, saame hulgad, mida nimetatakse silindriteks ruumis Ω. Silindri näiteks on hulk:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times \Omega_{k+1} \times \ldots \times \Omega_n = \left\{ (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in A_i, \ i=1,\ldots,k, \ \omega_i \in \Omega_i, \ i = k+1,\ldots,n \right\}.$$

Mõnikord kasutatakse otsekorrutise korral ka tähist:

$$\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i ; \quad A_1 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i ;$$

sel juhul on silindri üldavaldiseks

$$\prod_{j=1}^{k} A_{i_j} \times \prod_{j=1}^{n-k} \Omega_{m_j} , \quad (k=1,\dots,n), \tag{2}$$

kus hulk $\{i_1,\dots,i_k\}$ on meelevaldne k-elemendiline alamhulk hulgast $\{1,2,\dots,n\}$, aga $\{m_1,\dots,m_{n-k}\} = \{1,\dots,n\} \setminus \{i_1,\dots,i_k\}$.

Erijuhul, kui kõik ruumid Ω_i on omavahel võrdsed, kasutame otsekorrutise jaoks tähistust Ω^n. Selle ruumi elementideks on järjestatud elemendirühmad $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n; \omega_i \in \Omega)$.

2. Mõõtuvate ruumide otsekorrutis.

Olgu ruumid $\Omega_1,\dots,\Omega_n$ mõõtuvad vastavalt σ-algebrate $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_n$ suhtes. Hulkade klass $\mathcal{K} = \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{C}_i , \ i=1,\dots,n\}$ ei ole üldiselt σ-algebra. Mõõtuvus ruumis $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ defineeritakse σ-algebra $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ abil, kus $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ on hulkade klassi $\mathcal{K}$ poolt indutseeritud minimaalne σ-algebra, mida tähistatakse sümboliga

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_n .$$

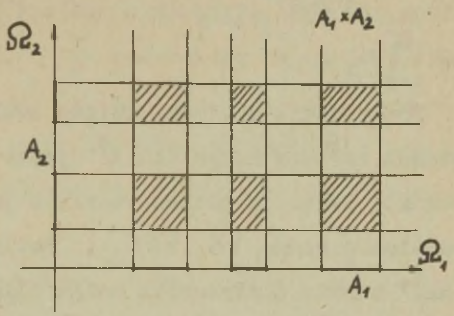
Siin σ-algebrat $\mathcal{C}$ nimetatakse σ-algebrate $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_n$ otsekorrutiseks. Tuleb aga meeles pidada, et iga hulk $A \in \mathcal{C}$ ei tarvitse olla esitatav kujul $A = A_1 \times \dots \times A_n$, $A_i \in \mathcal{C}_i$.

Näide 1. Olgu ruumiks Ω reaalarvude hulk R, kus mõõtuvus on määratud Boreli mõttes mõõtuvusena.

Ruumiks Ω^n on siis n-dimensionaalne eukleidiline ruum R^n, mõõtuvus selles ruumis on määratud Boreli mõttes mõõtuvatel hulkadel.

Risttahukad ruumis R^n on tavalised n-dimensionaalsed risttahukad, kui hulkadeks A_i on lõigud ruumis R_i ; lugedes hulkadeks A_i mitmest lõigust (vahemikust) koosnevaid hulki, saame risttahukatena tavaliste n-mõõtmeliste risttahukate hulgad (vt. joonis 63).

On lihtne näha, et risttahukate summa ja vahe ei anna alati risttahukat (tuua näide!), seetõttu ei saa ka σ -algebra koosneda üksnes risttahukatest.



Joon. 63.

3. Mõõtude korrutis.

Olgu igas ruumis Ω_i määratud mõõt μ_i , s. t., olgu meil mõõduga ruumide hulk $(\Omega_1, \mathcal{C}_1, \mu_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{C}_n, \mu_n)$. Defineerime ruumide otsekorrutise $\Omega = \Omega_1 x \ldots x \Omega_n$ ning määrame mõõtuvuse σ -algebra $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_n$ suhtes selles ruumis. Järgmiseks probleemiks on mõõdu μ defineerimine ruumis $(\Omega, \mathcal{C})$.

Igale risttahukale $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, kus $A_i \in \mathcal{C}_i$, saame määrata mõõdu μ seosega:

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \ldots \mu_n(A_n) . \quad (3)$$

Teoreemi 2.6 kohaselt on võimalik selliselt defineeritud mõõtu jätkata kõigi hulkade $A \in \mathcal{C}$ jaoks, sest $\mathcal{C} = \mathcal{C}\{A_1 \times \ldots \times A_n : A_i \in \mathcal{C}_i\}$.

Selliselt defineeritud mõõtu μ nimetatakse mõõtude korrutiseks; $\mu = \mu_1 \times \ldots \times \mu_n = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$. Ilmselt

$$\mu(\Omega) = \mu_1(\Omega_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(\Omega_n) .$$

Seega on võimalik igale mõõduga ruumide lõplikule hulgale $\{(\Omega_i, \mathcal{C}_i, \mu_i) , \ i=1,\ldots,n\}$ seada vastavusse mõõduga ruum $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$, kus $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$, $\mathcal{C} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i$, $\mu = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$.

Edasi tekib küsimus, kuidas avaldub mõõt $\mu = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$ mistahes mõõtuva hulga $A \in \mathcal{C}$ jaoks (A ei ole üldiselt risttahukas). Lihtsuse mõttes vaatleme esialgu ainult kahedimensionaalseid ruume $\Omega_1 \times \Omega_2$. Selle küsimuse selgitamiseks on meil tarvis defineerida hulga <u>lõige</u>.

Olgu meil mingi hulk $A \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Hulga A lõikeks punktis ω_1^* nimetame hulka $A_{\omega_1^*} = \{\omega_2 : (\omega_1^*, \omega_2) \in A\}$ ruumis Ω_2 . Hulga A lõikeks punktis ω_2^* nimetame hulka $A_{\omega_2^*} = \{\omega_1 : (\omega_1, \omega_2^*) \in A\}$ ruumis Ω_1 ; ilmselt, kui $\omega_i^* \notin A$, siis $A_{\omega_i^*} = \emptyset$ (i=1,2). (Miks?)

<u>Teoreem 1</u>. Mõõtuva hulga A iga lõige $A_{\omega_i^*}$ on mõõtuv (i=1,2) .

<u>**Tõestus**</u>. Lihtsuse mõttes võtame i=1 ; i=2 korral on tõestus täiesti analoogiline. Vaatleme kõigi selliste mõõtuvate hulkade K klassi $\mathcal{K}$ ruumis $\Omega_1 \times \Omega_2$, et iga hulga K iga lõige K_{ω_1} $(\omega_1 \in \Omega_1)$ on mõõtuv. Selline hulkade klass on σ-algebra. Tõepoolest, olgu $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, s. t. iga punkti ω_1 korral $K_{1\omega_1}, K_{2\omega_1} \in \mathcal{C}_2$.

Siis $(K_1 \setminus K_2)_{\omega_1} = \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in K_1 \setminus K_2\} =$

$$= \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in K_1,\ (\omega_1, \omega_2) \notin K_2\} =$$
$$= \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in K_1\} \setminus \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in K_2\} \in \mathcal{C}_2,$$
s. t. $K_1 \setminus K_2 \in \mathcal{K}$.

Sarnaselt saab tõestada, et ka iga jada $K_1, K_2, \ldots$ korral kuulub summa $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ klassi $\mathcal{K}$. (Tõestada!)

Et kõik klassi $\mathcal{K}$ kuuluvad hulgad on mõõtuvad, siis $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$; teiselt poolt, kuna iga risttahuka $A_1 \times A_2$ lõige on alati mõõtuv, kui $A_1 \in \mathcal{C}_1$, $A_2 \in \mathcal{C}_2$, siis $\mathcal{K} \supset \mathcal{C}(A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{C}_i) = \mathcal{C}$, niisiis saime mõlemapoolse sisaldusseose, ning $\mathcal{K} = \mathcal{C}$, seega iga mõõtuva hulga A iga lõige on mõõtuv.

Osutub, et mistahes hulga A mõõt $\mu(A)$ avaldub mõõtude μ_1 ja μ_2 kaudu hulga A lõigete abil. Tõestame selle kohta teoreemi.

<u>Teoreem 2</u>. Olgu A suvaline mõõtuv hulk ruumis $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Siis hulga A mõõt $\mu(A)$ avaldub järgnevalt:

$$\mu(A) = \int_{\Omega_2} \mu_1(A_{\omega_2})\mu_2(d\omega_2) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1})\mu_1(d\omega_1), \quad (4)$$

kus A_{ω_2} on hulga A lõige punktis ω_2, A_{ω_1} - hulga A lõige punktis ω_1 (need lõiked kuuluvad vastavalt ruumidesse Ω_1 ja Ω_2) .

<u>Tõestus</u>.

a) Olgu $A = A_1 \times A_2$; kus $A_1 \in \mathcal{C}_1$, $A_2 \in \mathcal{C}_2$; siis

$$A_{\omega_2} = \begin{cases} \emptyset, & \omega_2 \notin A_2 ; \\ A_1, & \omega_2 \in A_2 ; \end{cases}$$

ja

$$\mu_1(A\omega_2) = \begin{cases} 0, & \omega_2 \notin A_2 \\ \mu_1(A_1), & \omega_2 \in A_2 , \end{cases}$$

seega $\mu_1(A_{\omega_2}) = \mu_1(A_1)\, I_{A_2}$.

Integreerime nüüd saadud avaldist:

$$\int_{\Omega_2} \mu_1(A\omega_2)\mu_2(d\omega_2) = \int_{\Omega_2} \mu_1 (A_1) I_{A_2} \cdot \mu_2(d\omega_2) =$$

$$= \int_{A_2} \mu_1(A_1)\mu_2(d\omega_2) = \mu_1(A_1) \int_{A_2} \mu_2(d\omega_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Seose (3) kohaselt aga $\mu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$, seega ongi võrduse (4) esimene osa tõestatud.

Samal viisil saab näidata, et

$$\int_{\Omega_1} \mu_2(A\omega_1)\mu_1(d\omega_1) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) . \quad \text{(Tõestada!)}$$

b) Olgu $A = \bigcup_{i=1}^{n} A^{(i)}$, $(A^{(i)} = A_1^{(i)} \times A_2^{(i)},\ A_j^{(i)} \cap A_j^{(k)} =$

$= \emptyset$, $i \neq k$, $j=1,2)$.

Saame sel juhul analoogiliselt eelneva juhuga:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_1(A_1^{(i)}) \cdot \mu_2(A_2^{(i)}) .$$

(Tõestada, kasutades integraali aditiivsust!)

c) Edasi vaatleme hulkadest $A = A_1 \times A_2$ moodustatud monotoonset klassi $\mathcal{M}\{A_1 \times A_2,\ A_1 \in \mathcal{C}_1,\ A_2 \in \mathcal{C}_2\} = \mathcal{C}\{A_1 \times A_2,\ A_1 \in \mathcal{C}_1,\ A_2 \in \mathcal{C}_2\}$, s.o. teoreemi 1.5 põhjal sama hulkade klassi poolt indutseeritud σ-algebrat. Kasutades integraali omadust 9°, saab näidata, et klassi $\mathcal{M}$ kuuluvate hulkade korral kehtib seos (4) ning sellega ongi meie väide tõestatud.

Saadud tulemust saab induktsiooni teel üle kanda ka ruumidesse $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$; selleks tuleb vaid valida

$$\Omega_1' = \prod_{i=1}^{k-1}\Omega_i \,,\ \Omega_2' = \Omega_k \ (k=2,\dots,n) .$$

4. Ruumide lõpmatu korrutis.

Mõningatel juhtudel on vaja uurida ka ruumide lõpmatut korrutist

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots = \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i = \Omega .$$

Ruumi Ω punktideks on kõik (järjestatud) jadad $\{(\omega_1, \omega_2, \dots) \,,\ \omega_i \in \Omega_i\}$; risttahukateks ruumis Ω on kõik hulgad

$$A_1 \times A_2 \times \dots = \prod_{i=1}^{\infty} A_i \,,\quad A_i \in \Omega_i \,,$$

silindriteks hulgad

$$\prod_{j=1}^{\infty} A_{i_j} \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\Omega_{i_k} \,,$$

$\{i_j\} + \{i_k\} = N$ (kõigi naturaalarvude hulk; erijuhul võib üks jadadest $\{i_j\}$ või $\{i_k\}$ ka lõplik olla).

Olgu ruumid Ω_i $(i=1,2,\dots)$ mõõtuvad σ-algebrate $\mathcal{C}_i$ mõttes. Mõõtuvuse ruumis Ω saame ka sel juhul defineerida σ-algebra $\mathcal{C}(\{\prod_{i=1}^{\infty} A_i : A_i \in \mathcal{C}_i \,,\ i=1,2,\dots\})$ kaudu, s. t. ruumides Ω_i $(i=1,2,\dots)$ mõõtuvate hulkade abil defineeritud risttahukate hulga poolt indutseeritud σ-algebra kaudu. Tähistame saadud σ-algebra jällegi sümboliga

$$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{C}_i \,,$$

ning nimetame seda σ-algebrate $\mathcal{C}_i$ korrutiseks.

Analoogiliselt on võimalik defineerida ka mõõt ruumis $(\Omega, \mathcal{C})$, kui vaid igas ruumis $(\Omega_i, \mathcal{C}_i)$ on defineeritud mõõt μ_i. Nimelt defineerime mõõdu kõigepealt mõõtuvate risttahukate hulgal $\{A\} = \{\prod_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{C}_j\}$ seosega

$$\mu(A) = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_i) .$$

Selleks, et mõõt μ oleks lõplik, s. t. $\mu(A) < \infty$ iga $A \in \Omega$ korral, on tarvilik, et kehtiks seos

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(\Omega_i) < \infty .$$

(Kas see tingimus on ühtlasi piisav?)

See tingimus on täidetud siis, kui kõigis ruumides Ω_i (välja arvatud ülimalt lõplik hulk ruume) on mõõt μ_i määratud tõenäosusmõõduna, s. t. $\mu_i(\Omega_i) = 1$ $(i=1,2,\ldots)$.

Tõenäosusmõõtude korral kehtib Andersen-Jenseni teoreem, mis on üldistuseks teoreemile 1. (Tõestus vt. [2] või [4]).

Teoreem 3 (Andersen-Jenseni teoreem. Tõenäosusmõõtude korrutis $\mu = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i$, $\mu_i(\Omega_i) = 1$ on σ-aditiivne hulkade klassil $\{\prod_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{C}_i\}$ ning on jätkatav σ-algebrale $\mathcal{C}\{\prod_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{C}_i\}$. Seega osutub ka ruum $(\prod \Omega_i, \prod \mathcal{C}_i, \prod \mu_i)$ mõõduga ruumiks. Märgime, et ka mõõt $\prod \mu_i$ on tõenäosusmõõt, kui kõik mõõdud μ_i on tõenäosusmõõdud.

Tõenäosusmõõtude korral pakub huvi mõõtude kooskõla küsimus:

Olgu meil kaks lõplikku korrutist:

$$\Omega^{(1)} = \prod_{j=1}^{n} \Omega_{i_j} \quad \text{ja} \quad \Omega^{(2)} = \prod_{l=1}^{m} \Omega_{k_l} .$$

$$\{i_1,\ldots,i_n\} \cap \{k_1,\ldots,k_m\} = \{p_1,\ldots,p_s\} ,$$
$$\{i_1,\ldots,i_n\} \setminus \{p_1,\ldots,p_s\} = \{i'_1,\ldots,i'_{n'}\} ,$$
$$\{k_1,\ldots,k_m\} \setminus \{p_1,\ldots,p_s\} = \{k'_1,\ldots,k'_{m'}\} .$$

Olgu ruumis $\Omega^{(1)}$ defineeritud mõõt μ_1 ja ruumis $\Omega^{(2)}$ defineeritud mõõt μ_2.

Kui kehtib seos $\mu_1(\prod_{r=1}^{s} A_{p_r} \times \prod_{r'=1}^{n'} \Omega_{i'_{r'}}) = $ $= \mu_2 \left(\prod_{r=1}^{s} A_{p_r} \times \prod_{r'=1}^{m'} \Omega_{k'_{r'}} \right)$ iga hulga $\prod_{i=1}^{s} A_{p_r}$, $A_{p_r} \in \Omega_{p_r}$ $(r=1,2,\ldots,s)$ korral, siis ütleme, et mõõdud μ_1 ja μ_2 on kooskõlas. Huvitav on ka ülalesitatud väitega teatud mõttes vastupidine väide, nn. Daniel-Kolmogorovi teoreem, millel on oluline tähtsus eriti juhuslike protsesside teoorias (tõestus vt. [2] või [4]).

Teoreem 4 (Daniel-Kolmogorovi teoreem). Olgu ruum

$$\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} R_i ,$$

s. t. lõpmatudimensionaalne eukleidiline ruum, kusjuures mõõtuvust mõistame siin Boreli mõttes mõõtuvusena:

$$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i .$$

Vaatleme kõikvõimalikke mõõduga ruume $(\Omega^n, \mathcal{B}^n, \mu_n)$, kus $\Omega^n = \prod_{j=1}^{n} R_{i_j}$, $\mathcal{B}^n = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{i_j}$ ning olgu tõenäosusmõõdud μ_n kooskõlas. Siis määravad tõenäosusmõõdud μ_n ruumis Ω üheselt tõenäosusmõõdu μ nii, et μ on kõigi mõõtudega μ_n kooskõlas.

5. Mitmedimensionaalsed mõõtuvad funktsioonid.

Olgu defineeritud mõõtuvad ruumid $(R_1,\mathcal{B}_1),\ldots,(R_n,\mathcal{B}_n)$ ning $(\Omega,\mathcal{C})$, samuti ka mõõtuvad funktsioonid $X_i(\Omega\to R_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Defineerides ruumi

$R^n = \prod_{i=1}^{n} R_i$, kus mõõtuvus on määratud σ-algebraga $\mathcal{B}^n = \prod_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i$, näeme, et ühtlasi on defineeritud ka (n-dimensionaalne) funktsioon

$$X(\Omega\to R^n)$$

seostega:

$$X(\omega) = (X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega)) = X(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in R^n .$$

Näitame, et ka funktsioon $X(\omega)$ on mõõtuv.

Teoreem 5. Funktsioon $X(\omega)$ on mõõtuv parajasti siis, kui kõik funktsioonid $X_i(\omega)$ on mõõtuvad $(i=1,2,\ldots,n)$.

Tõestus.

1) Oletame, et $X(\omega)$ on mõõtuv. Siis on mõõtuv ka iga hulk $X^{-1}(A)$, kui A on mõõtuv hulk ruumis R^n. Olgu i suvaline täisarv, $0<i<n$. Valime hulga $A_i\in R^n$ järgnevalt:

$A_i = (\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} R_j)\times(-\infty,x_i)$, kus x_i on suvaline punkt ruumis R_i.

Siis on mõõtuv ka hulk

$$X^{-1}(A) = \{\omega:\ X(\omega)\in A\} = \{\omega:\ X_i(\omega)< x_i\} .$$

Viimasest võrdusest järeldub funktsiooni X_i mõõtuvus.

2) Oletame, et funktsioonid $X_i(\omega)$ on mõõtuvad $(i=1,2,\ldots,n)$, s. t. hulgad

$$\{\omega : X_i(\omega) < x_i\} = (\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} R_j) \times (-\infty, x_i) = A_i$$

on mõõtuvad iga x_i korral $(i=1,2,\dots,n)$.

Siis on mõõtuv ka hulk

$$\{\omega : X_i(\omega) < x_i \ , \ i=1,\dots,n\} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

ja sellega on meie väide tõestatud.

Järeldus 1. Mõõtuvate funktsioonide summa, vahe, korrutis ja jagatis on mõõtuvad funktsioonid. (Tõestada, kasutades teoreeme 5 ja 3.9 ning näidet 3.3!)

Järeldus 2. Kui $X_n(\Omega_1 \to R)$ $(n=1,2,\dots)$ on mõõtuvad, siis on ka $\sup X_n(\omega)$, $\inf X_n(\omega)$, $\underline{\lim}\, X_n(\omega)$ ja $\overline{\lim}\, X_n(\omega)$ mõõtuvad. (Tõestada!)

6. Kordne integraal. Fubini teoreem.

Vaatleme kahte mõõduga ruumi $(\Omega_1, \mathcal{C}_1, \mu_1)$ ja $(\Omega_2, \mathcal{C}_2, \mu_2)$. Olgu nende ruumide korrutis Ω:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \ ; \ \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \ ; \ \mu = \mu_1 \times \mu_2 .$$

Vaatleme mõõtuvat funktsiooni $X(\Omega \to R)$ ning leiame selle integraali

$$\int_{\Omega} X(\omega)\mu(d\omega) \tag{5}$$

avaldise, kasutades integreerimist ruumides Ω_1 ja Ω_2 (probleem on analoogiline kahekordse integraali avaldamisele korduva integreerimise kaudu).

Selleks on meil tarvis defineerida funktsiooni lõige. Funktsiooni X lõikeks punktis $\omega_1^* \in \Omega_1$ nimetatakse funktsiooni $X_{\omega_1^*}(\Omega_2 \to R)$, mis on defineeritud seosega:

$$X_{\omega_1}(\omega_2) = X(\omega_1^*, \omega_2)(\omega_2 \in \Omega_2) .$$

Analoogiliselt saab määrata ka funktsiooni X lõike mingis punktis $\omega_2^* \in \Omega_2$ $X_{\omega_2^*}(\Omega_1 \to R)$:

$$X_{\omega_2^*}(\omega_1) = X(\omega_1, \omega_2^*) \quad (\omega_1 \in \Omega_1) .$$

Teoreem 6. Mõõtuva funktsiooni lõiked on alati mõõtuvad funktsioonid.

Tõestus. Tuleb näidata, et hulk

$$\left\{\omega_2 : X_{\omega_1^*}(\omega_2) < x\right\} = \left\{\omega_2 : X(\omega_1^*, \omega_2) < x\right\} = A_{\omega_1^*} ,$$

s. o. hulga

$$A = \left\{(\omega_1, \omega_2) : X(\omega_1, \omega_2) < x\right\}$$

lõige punktis ω_1^* on alati mõõtuv. Et aga funktsioon $X(\omega)$ on eelduse kohaselt mõõtuv, siis on ka hulk A mõõtuv; mõõtuva hulga lõige on teoreemi 1 põhjal mõõtuv, seega on ka hulk A_{ω_1} mõõtuv. Teoreem on tõestatud.

Kasutades funktsiooni lõiget, sõnastame Fubini teoreemi:

Teoreem 7 (Fubini teoreem). Kui integraal (5) eksisteerib, on ta alati avaldatav integraalide kaudu järgnevate seoste kohaselt:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X(\omega)\mu(d\omega) = \int_{\Omega_1} \mu_1(d\omega_1) \int_{\Omega_2} X_{\omega_1}(\omega_2)\mu_2(d\omega_2) =$$

$$= \int_{\Omega_2} \mu_2(d\omega_2) \int_{\Omega_1} X_{\omega_2}(\omega_1)\mu_1(d\omega_1).$$

Tõestus. Tõestame teoreemi kõigepealt juhul, kui $X(\omega) = I_A$. (A on mingi meelevaldne mõõtuv hulk ruumis Ω.) Sel juhul järeldub tulemus vahetult mõõtude korrutamise teoreemist (vt. teoreem 2).

Kasutades integraali aditiivsust ja homogeensust, saame leitud tulemust kasutades tõestada oma väite ka lihtfunktsioonide jaoks. Integraali omaduse 9° abil järeldame siit teoreemi kehtivuse ka mittenegatiivse mõõtuva funktsiooni $X(\omega)$ jaoks. Et funktsiooni integraali eksisteerimist oli eeldatud, peab funktsioonil $X(\omega)$ kas positiivne või negatiivne osa olema integreeruv, siis aga peavad ka lõigete vastavad osad olema integreeruvad ning lõplik tulemus järeldub integraali aditiivsusest. (Tõestada teoreem üksikasjaliselt!)

7. Ülesandeid.

1. Defineerida ruumi $\Omega = \{A, \bar{A}\}$ jaoks ruum Ω^n. Missugused punktid eksisteerivad ruumis Ω^n? Kui palju erinevaid punkte on ruumis Ω^n?

2. Lahendada sama ülesanne ruumi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ jaoks.

3. Missugused on silindrid ning risttahukad ülalkirjeldatud ruumides?

4. Millise kujuga on silinder ruumis R^n?

5. Millega võrduvad hulgad

$$(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2),$$

$$(A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2),$$

$$(A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2),$$

kui eeldada, et $(A_1, B_1 \subset \Omega_1, A_2, B_2 \subset \Omega_2)$?

6. Vaatleme kahte ruumi Ω_1 ja Ω_2; olgu neis ruumides määratud algebrad $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$. Vaatleme hulkade klas-

si $\mathcal{K} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} (A_1^{(i)} \times A_2^{(i)}) : A_1^{(i)} \in \mathcal{A}_1, \ A_2^{(i)} \in \mathcal{A}_2 \right\}$. Tõestada, et selliste hulkade klass $\mathcal{K}$ on algebra.

7. Millal on mõõtude korrutis $\mu = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$ lõplik mõõt?

8. Miks on iga risttahuka $A_1 \times A_2$ iga lõige mõõtuv, kui A_1 ja A_2 on mõõtuvad?

9. Lõpetada teoreemi 2 tõestus, tehes läbi kõik arutelud samm-sammult.

10. Mis on üldisem mõiste, kas silinder või risttahukas?

11. Kas on tarvis nõuda, et kõik mõõdud oleksid tõenäosusmõõdud, selleks et lõpmatu korrutismõõt oleks lõplik?

12. Kas kooskõlatingimuste täidetuseks on tarvilik, et mõõdud oleksid tõenäosusmõõdud?

13. Kas oleks võimalik defineerida ka lõpmatudimensionaalne mõõtuv funktsioon?

14. Miks järeldub hulga $\{\omega : X_1(\omega) < x_1, \ldots, X_n(\omega) < x_n\}$ mõõtuvusest hulkade $\{\omega : X_i(\omega) < x_i\}$ mõõtuvus?

15. Milline analoogia on Fubini teoreemi ja matemaatilises analüüsis tuntud kordse integraali arvutamise valemi vahel? Mis on funktsiooni lõike analoogiks?

III. TÕENÄOSUSTEOORIA PÕHIMÕISTEID.

§ 1. Sündmus ja tõenäosus.

1. Sündmuste ruum.

Tõenäosusteooria üheks põhimõisteks on sündmus. Teatava fikseeritud tingimuste kompleksi korral (katse puhul) võib tavaliselt esineda mitu erinevat sündmust (katsetulemust). Kõigi erinevate sündmuste hulka, millest kindlasti toimub üks ja ainult üks, nimetatakse tõenäosusteoorias ka elementaarsündmuste hulgaks ehk elementaarsündmuste ruumiks. Antud tingimuste kompleksi korral võimalike sündmuste hulgale saab vastavusse seada teatava hulga, mille punktideks on elementaarsündmused. See hulk on (vastavalt abstraktse ruumi definitsioonile) vaadeldav teatava ruumina. Sündmusteks on elementaarsündmuste hulgad - seega teatavad hulgad ruumis. On tõestatud (Stone, 1936, vt. näiteks [3] lk. 13), et sündmustele saab seada vastavusse hulgad elementaarsündmuste ruumist nii, et saadud hulkade klass on isomorfne kõigi sündmuste hulgaga hulgateoreetiliste operatsioonide suhtes (sündmuste summale vastab hulkade summa, vahele - vahe ja korrutisele - hulkade ühisosa). Seetõttu edaspidi loobume üldse sündmuse ja temale vastava hulga eristamisest ning loeme sündmusteks teatavaid hulki sündmuste ruumis. Nõue, et sündmuste summa, vahe ja korrutis oleksid alati sündmused, asetab aga teatavad kitsendused hulkade klassile, mille abil me sündmused defineerime.

Et me oma kursuses käsitleme tõenäosusteooriat <u>aksiomaatiliselt</u>, siis vaatleme edaspidi sündmust kui teatavate aksioomidega määratletud hulka sündmuste ruumis, pööramata mingit tähelepanu sündmuse sisulisele tähendusele või selle kirjeldamisele.

Niisiis, edaspidi loeme antuks mingi meelevaldse abstraktse ruumi Ω, mida nimetame <u>elementaarsündmuste ruumiks</u>. Ruumi Ω iga punkt moodustab elementaarsündmuse. Selleks, et määratleda sündmusi, tuleb meil nõuda veel, et ruumis Ω oleks mingil viisil defineeritud σ-algebra $\mathcal{C}$, s. t. ruum Ω oleks mõõtuv.

Iga $\mathcal{C}$-mõõtuvat hulka A ruumis Ω nimetame <u>sündmuseks</u>, s. t. sündmus on hulk $A \subset \Omega$, $A \in \mathcal{C}$. Paneme tähele, et selle definitsiooniga pole sugugi nõutud, et iga elementaarsündmus oleks sündmus - kuigi iga elementaarsündmus $\omega \in \Omega$ moodustab ühtlasi hulga $\{\omega\}$, ei tarvitse üldiselt kehtida seos $\{\omega\} \in \mathcal{C}$, s. t. ühepunktised hulgad ei tarvitse olla mõõtuvad (kuigi nad võivad seda olla).

Mõõtuvat ruumi $(\Omega, \mathcal{C})$ nimetame edaspidi <u>sündmuste ruumiks</u>. Sündmuste ruum sisaldab alati kindlasti hulka $\Omega \in \mathcal{C}$, s. t. ruumi Ω kõigi punktide hulka ehk <u>kindlat sündmust</u> (kõigi elementaarsündmuste hulk on määratud nõudega, et üks neist kindlasti esineb, s. t. kõigi elementaarsündmuste summa on kindel sündmus). Samuti sisaldab sündmuste ruum alati ka tühja hulka $\emptyset$ ehk <u>võimatut sündmust</u> (see ei sisalda ühtegi punkti, selletõttu ei saa üldse toimuda). Iga sündmusega A koos kuulub sündmuste ruumi ka tema <u>vastandsündmus</u> $\bar{A} = \Omega \setminus A$, s. t. sündmus, mis sisaldab neid ja ainult neid punkte (elementaarsündmusi), mida A ei sisalda, s. t., mis toimub parajasti siis, kui sündmus A ei toimu.

Sündmuste ruumis on defineeritud seosed: $A \subset B$ (sündmuse A toimumisest järeldub sündmuse B toimumine; $A = B$, kui kehtivad seosed $A \subset B$ ja $B \subset A$; ning operatsioonid: $A \cup B$ - toimub kas sündmus A, sündmus B või mõlemad; $A \cap B = AB$ - toimub niihästi sündmus A kui ka sündmus B; $A \setminus B$ - sündmus A toimub, sündmus B aga mitte. Kehtivad ka ilmsed seosed:

$$
\begin{aligned}
& AB \subset A\ ;\quad AB \subset B\ , \\
& A \subset A \cup B\ ;\ B \subset A \cup B\ , \\
& \emptyset \subset A\ ;\quad A \subset \Omega\ , \\
& A \setminus B \subset A\ , \\
& A \cup \bar{A} = \Omega\ , \\
& A \cup \emptyset = A\ , \\
& A \cap \Omega = A\ ,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

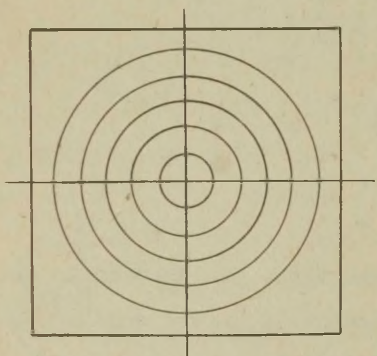
kus A ja B on suvalised sündmused. Olulised on ka nn. duaalsusseosed, mis seovad sündmustele ja vastandsündmustele rakendatud operatsioonide tulemusi:

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}\ , \quad & A \cup B = \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})}\ , \\
\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}\ , \quad & A \cap B = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}\ .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Näide 1. Koosnegu sündmuste ruum kahest elementaarsündmusest ω_1 ja ω_2. Tähistame sündmuse $\omega_1 = A$. Siis $\omega_2 = \bar{A}$. (Miks?) Kõik võimalikud hulgad sündmuste ruumis on: kindel sündmus Ω, võimatu sündmus $\emptyset$ ja sündmused A ja $\bar{A}$. Need neli hulka moodustavad σ-algebra $\mathcal{C}$ (tõestada!), seega võib neid lugeda kõiki sündmusteks. Sel juhul $\mathcal{C} = \mathcal{D}_\Omega$ (ruumi Ω kõigi alamhulkade hulk).

Selline σ-algebra kirjeldab kõiki kahe tulemusega katse abil määratud sündmusi (näiteks: mündivise, lambi läbipõlemine või mitteläbipõlemine teatava ajavahemiku vältel; märgi tabamine või mittetabamine tulistamisel jne.).

Näide 2. Vaatleme märkilaskmist, kusjuures eeldame, et kindlasti tabatakse märklauda. Elementaarsündmustena võime vaadelda märklaua iga üksiku punkti tabamist; sel juhul on elementaarsündmuste ruum kontiinuumi võimsusega. Sündmusel defineerime aga vastavalt märklaual paiknevate kontsentriliste rõngaste tabamisena (vt. joonis 64).



Joon. 64.

Seega on sündmusi meil vaid lõplik arv (kui rõngaid on 10, on erinevate sündmuste arv 2^{10}).

Samas ruumis võiksime aga mõõtuvuse defineerida ka mõõtuvusena Boreli mõttes.

2. Sündmuse tõenäosus.

Eeldame, et meil on sündmuste ruumis $(\Omega, \mathcal{C})$

defineeritud lõplik mõõt μ. Me ütleme, et see mõõt on tõenäosusmõõt, kui ta rahuldab tingimust

$$\mu(\Omega) = 1 .$$

Tõenäosusmõõtu tähistame edaspidi sümboliga P.

Igale lõplikule mõõdule μ on võimalik üheselt vastavusse seada tõenäosusmõõt, defineerides P iga mõõtuva hulga A jaoks seosega:

$$P(A)= \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} .$$

On lihtne näha, et sel viisil määratud hulgafunktsioon $P(A)$ on tõenäosusmõõt. (Miks?)

Edaspidi ütleme sündmuse A tõenäosusmõõdu asemel lihtsalt "sündmuse A tõenäosus".

Näeme, et kindla sündmuse Ω tõenäosus $P(\Omega) = 1$, aga võimatu sündmuse $\emptyset$ tõenäosus $P(\emptyset) = 0$ (vastavalt mõõdu analoogilisele omadusele).

Kasutades tõenäosuse jaoks mõõtude omadusi, saame järgnevad seosed:

Kui $AB = \emptyset$, siis $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (mõõdu aditiivsus; elementaarses tõenäosusteoorias tuntud "tõenäosuste liitmise lausena").

Kui $A \subset B$, siis $P(A) \leq P(B)$ (mõõdu monotoonsus).

Kui $A \subset B$, siis $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ (mõõdu subtraktiivsus)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) .$$

Sündmuste ruumi, milles on defineeritud tõenäosus, nimetame edaspidi <u>tõenäosusruumiks</u> ja tähistame: $(\Omega, \mathcal{C}, P)$.

Kui mingi omadus kehtib kogu tõenäosusruumis, välja arvatud hulgal, mille tõenäosus on null (s. t. välja arvatud sündmuse puhul, mille tõenäosus on null), öeldakse, et see omadus kehtib (meie ruumis) peaaegu kindlasti.

Näide 3. Olgu meil elementaarsündmuste ruumis Ω mingi tasandiline piirkond pindalaga S. Loeme sündmusteks kõik selles piirkonnas paiknevad pindala omavad (s. t. Jordani mõttes mõõtuvad - vt. näiteks [7], lk. 200) hulgad. Määrame sündmuste klassil lõpliku mõõdu $\mu(A) = s(A)$, kus $s(A)$ on hulga A pindala. Tõenäosusmõõdu saame defineerida seosega $P(A) = \frac{s(A)}{S}$. Näeme, et see on geomeetrilise tõenäosuse definitsioon.

3. Sündmuste sõltumatus.

Praktiliselt on sageli võimalik näidata sündmusi, mille sõltumatus on á priori (intuitiivselt) selge: sellised on näiteks kahe järjestikuse täringuviske tulemused; mingi inimese sünnipäev ja tema poolt loteriil saavutatav võit jne.

Vaadeldes aga aksiomaatiliselt defineeritud sündmusi ja tõenäosusi, tuleb aksiomaatiliselt määratleda ka sündmuste sõltumatus, ilma et meil tarvitseks tungida meid huvitavate sündmuste konkreetsesse sisusse.

Määratleme sündmuste sõltumatuse järgnevalt:

Olgu antud tõenäosusruum $(\Omega, \mathcal{C}, P)$. Kahte sündmust A ja B ($A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$) nimetame sõltumatuteks, kui kehtib seos:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{3}$$

Edasi võime defineerida ka sündmuste teatavate klasside sõltumatuse: sündmuste klasse $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{H}$ nimetame sõltumatuteks, kui mistahes sündmuste $A \in \mathcal{K}$ ja $B \in \mathcal{H}$ korral kehtib seos (3). Siinjuures ei tarvitse muidugi kehtida seos (3) kahe sündmuse A ja B korral, mis kuuluvad <u>samasse</u> klassi.

Edasi vaatleme kolme sündmust A , B ja C . Nende sündmuste puhul on olemas mitmesuguseid võimalusi sõltuvuse ja sõltumatuse jaoks.

Juhul, kui kõik sündmused on paarikaupa sõltumatud, kehtivad lisaks seosele (3) veel seosed:

$$\begin{aligned} P(AC) &= P(A)P(C) , \\ P(BC) &= P(B)P(C) . \end{aligned} \tag{4}$$

Sellest ei järeldu aga veel, et kehtiks seos

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) , \tag{5}$$

viimast tuleb eraldi nõuda. Teiselt poolt ei järeldu ka seose (5) kehtivusest seoste (3) ja (4) kehtimine.

Veelgi keerukam on olukord enam kui kolmest sündmusest koosnevate süsteemide korral, sest vaadeldavaid võimalikke sündmuste kombinatsioone on $2^n - n-1$.

Öeldakse, et n sündmusest $A_1 , \ldots, A_n$ koosnev süsteem on <u>täielikult sõltumatu</u>, kui kehtib seos:

$$P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

iga indeksite hulga $\{i_1,i_2,\ldots,i_k\} \subset \{1,2,\ldots,n\}$ korral, $k=2,\ldots,n$.

Lõpmatust hulgast sündmustest koosnevat süsteemi loeme täielikult sõltumatuks, kui tema iga lõplik osasüsteem on täielikult sõltumatu.

Sündmuste süsteemi $\mathcal{K}$ nimetame <u>paarikaupa sõltumatuks</u>, kui kehtib seos

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

iga sündmuste paari A_i , $A_j \in \mathcal{K}$ korral, kui vaid $i \neq j$. Tuleb muidugi märkida, et täielikult sõltumatu sündmuste süsteem on alati ka paarikaupa sõltumatu.

4. Ülesandeid.

1. Kuidas nimetatakse elementaarses tõenäosusteoorias üksteist välistavate sündmuste süsteemi, mille summa on kindel sündmus? Tuua näiteid!

2. Miks sisaldab sündmuste ruum alati võimatut sündmust?

3. Mis on võimatu sündmuse vastandsündmus? Kindla sündmuse vastandsündmus?

4. Kas võib leiduda kindlast sündmusest erinevaid sündmusi, mille tõenäosus on 1? Võimatust sündmusest erinevaid sündmusi, mille tõenäosus on 0? Kuidas tuleks neile küsimustele vastata, mõistes tõenäosust klassikalise definitsiooni kohaselt?

5. Mida tähendab sündmuste ruumis operatsioon Δ (sümmeetriline vahe)?

6. Tõestada seosed (1).

7. Defineerida näidetes 1 ja 2 kirjeldatud sündmuste jaoks tõenäosused. Defineerida ühe jaoks neist mõõt, mis ei ole tõenäosusmõõt, ning tuletada sellest tõenäosusmõõt.

8. Konstrueerida näide paariviisi sõltumatute sündmuste süsteemist, mis pole täielikult sõltumatu.

9. Kaks sündmust, mis on üksteist välistavad, on sõltumatud. Mida saab nende sündmuste kohta öelda?

10. Kaks sündmust, milledest üks järeldub teisest, on sõltumatud. Kas on see võimalik?

§ 2. J u h u s l i k s u u r u s .

1. Juhusliku suuruse mõiste.

Elementaarses tõenäosusteoorias mõistetakse juhusliku suurusena sellist muutuvat suurust, mis sõltuvalt juhusest (elementaarsündmusest) võib omandada erinevaid (arvulisi) väärtusi, s. t. elementaarsündmuse funktsiooni. Sama mõiste on kantud üle ka aksiomaatilisesse tõenäosusteooriasse, kuid selleks, et saada sobivat matemaatilist aparatuuri juhuslike suurustega opereerimiseks, tuleb meil esitada vaadeldavale funktsioonide klassile veel teatavaid kitsendusi, nimelt nõuda, et funktsioonid oleksid mõõtuvad. Niisiis:

Juhuslikuks suuruseks $X(\omega)$ nimetame tõenäosusruumis $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ defineeritud mõõtuvat funktsiooni reaalarvude ruumi $(R, \mathcal{B}, \mu)$, mida loeme Boreli mõttes mõõtuvaks ning varustatuks Lebesgue'i mõõduga.

Loeme kaht juhuslikku suurust $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$ ekvivalentseteks, kui

$$P(\omega : X(\omega) \neq Y(\omega)) = 0 ,$$

ja kirjutame siis $X(\omega) \sim Y(\omega)$. Selliseid juhuslikke suurusi nimetatakse peaaegu kindlasti võrdseteks. Olgu märgitud, et küllalt sageli pakub meile huvi mitte üksikute juhuslike suuruste $X(\omega)$, vaid nende ekvivalentsiklasside, s. t. kõigi juhuslike suuruste $X_\alpha(\omega) \sim X(\omega)$ vaatlemine. Sel juhul me loeme kaht juhuslikku suurust võrdseks, kui nad on ekvivalentsed.

2. <u>Juhusliku suuruse jaotus</u>.

Olgu antud tõenäosusruum $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ ning selles defineeritud juhuslik suurus $X(\Omega \to R)$. Teatavasti indutseerib juhusliku suuruse $X(\omega)$ pöördkujutis $X^{-1}(A)$ mõõtuvuse ning mõõdu ruumis R : mõõtuvateks loetakse hulki $\{A : A \subset R, X^{-1}(A) \in \mathcal{C}\}$. Igale sellisele hulgale on indutseeritud ka mõõt μ seosega:

$$\mu(A) = P\{\omega : X(\omega) \in A\} = P(X^{-1}(A)).$$

Sel viisil indutseeritud mõõtu μ tähistame sümboliga P_X ja nimetame juhusliku suuruse <u>X jaotuseks</u> (ka tõenäosusjaotuseks). Näeme, et jaotus P_X on tõenäosusmõõt: $P_X(R) = P\{\omega : X(\omega) \in R\} = 1$.

Osutub, et selliselt defineeritud jaotus langeb ühte elementaarsest tõenäosusteooriast tuttava jaotuse mõistega, kus vaadeldakse eeskätt juhte, kui $X(\omega)$ on lihtfunktsioon. Sel juhul on $X(\omega)$ väärtuseks reaalarvud $x_1, \ldots, x_n$ ja juhuslik suurus $X(\omega)$ on defineeritud seosega

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(\omega), \quad \text{kus} \quad A_i A_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega .$$

Siis on jaotus määratud võrdustega:

$P_X(x_i) = P(A_i) = p_i \quad (i=1,2,\ldots,n);$ $P_X(B) = 0$, kui B ei sisalda ühtegi punktidest x_i.

Analoogiliselt on jaotus määratud ka elementaarfunktsiooni

$X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega)$ korral.

Tuleb märkida, et jaotus on juhusliku suuruse üks olulisemaid karakteristikuid. Ometi ei määra jaotus juhuslikku suurust üheselt, kuna ta ei anna mingit informatsiooni tõenäosusruumi kohta, milles juhuslik muutuja X on defineeritud. Seega võib erinevates tõenäosusruumides $(\Omega_1, \mathcal{C}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{C}_2, P_2)$ defineeritud juhuslikel suurustel $X_1(\Omega_1 \to R)$ ja $X_2(\Omega_2 \to R)$ olla sama jaotus: $P_{X_1}(A) = P_{X_2}(A)$ iga hulga $A \subset R$ korral.

Teiselt poolt, alati, kui on antud jaotus P_X, võib defineerida juhusliku suuruse $X(\omega)$ nii, et P_X on tema jaotuseks. Lihtsaim võimalus on selleks: valida ruumiks Ω juhusliku muutuja väärtuste hulk $[X] \subset R$ ning määrata suurus X samasusteisendusega:

$$X(\omega) = X(x_\alpha) = x_\alpha, \quad \text{iga } x_\alpha \in [X] \text{ korral.}$$

Märgime, et juhusliku suuruse X poolt indutseeritud tõenäosusruumi $(R, \mathcal{C}_X, P_X)$ nimetatakse ka <u>juhusliku suuruse X väärtuste ruumiks</u>.

<u>Näide 1.</u> Indikaatorfunktsiooni jaotus: $X = I_A$.

$$P_{I_A}(1) = P(A), \quad P_{I_A}(0) = 1 - P(A).$$

<u>Näide 2.</u> Binomiaaljaotus $B(n,p)$; X on binomiaaljaotusega parameetritega n ja p ehk $X \sim B(n,p)$.

$$P_X(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,\ldots,n,\ q=1-p).$$

<u>Näide 3.</u> Poissoni jaotus parameetriga λ : $X \sim P(\lambda)$

$$P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k=0,1,\ldots).$$

<u>Näide 4.</u> Ühtlane jaotus parameetritega a ja b : $X \sim U(a,b)$.

$$P_X([c,d]) = \max\left(0, \frac{\min(b,d) - \max(a,c)}{b-a}\right), \quad c,d \in R .$$

<u>Näide 5.</u> Normaaljaotus parameetritega m ja σ : $X \sim N(m,\sigma)$.

$$P_X([c,d]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_c^d e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Ülal näidetena toodud jaotused kuuluvad nn. klassikaliste jaotuste hulka. Nagu näeme, kirjeldab iga siin märgitud jaotus parameetritest sõltuva jaotuste hulga e. pere, millest parameetrite fikseerimisega saab ühe konkreetse jaotuse eraldada.

3. Juhuslik vektor.

Mõõtuvat funktsiooni tõenäosusruumist $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ n-dimensionaalsesse eukleidilisesse ruumi R^n, kus mõõtuvus on määratud Boreli mõttes mõõtuvusena (vastava σ-algebra tähistame sümboliga $\mathcal{B}^n$), s. t. funktsiooni $X(\Omega \to R^n)$, nimetatakse juhuslikuks vektoriks. Seega on n-dimensionaalne juhuslik vektor n juhuslikust suurusest $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$; $X_i(\Omega \to R)$ koosnev süsteem. Üksikuid juhuslikke suurusi $X_i(\omega)$ sellest süsteemist nimetame vektori $\bar{X}(\omega)$ <u>komponentideks</u>. Ilmselt võime me juhuslikku suurust käsitleda ka juhusliku vektori erijuhuna – ühedimensionaalse vektorina.

Juhusliku vektori jaotus $P_{\bar{X}}$ määrab mõõdu n-dimensionaalses ruumis R^n :

$$P_{\bar{X}}(A_n) = P(\omega : \bar{X}(\omega) \in A_n) = P(\omega : (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in A_n),$$

kus $A_n \in R^n$.

Juhusliku vektori jaotust $P_{\bar{X}}$ nimetatakse ka tema komponentide $X_1,\dots,X_n$ <u>ühiseks jaotuseks</u> ning tähistatakse siis: $P_{X_1,X_2,\dots,X_n}$. Üldjuhul ei ole juhuslike suuruste süsteemi $X_1,\dots,X_n$ ühise jaotuse $P_{X_1,\dots,X_n}$ teadmiseks piisav kõigi vaadeldavasse süsteemi kuuluvate suuruste $X_i(i=1,\dots,n)$ jaotuste P_{X_i} teadmine. See asjaolu on arusaadav, kui peame silmas, et juhusliku vektori komponendid võivad olla sõltuvad, sel puhul aga ei saa me süsteemi vaatlemisel sama tulemust kui süsteemi kuuluvate üksiknähtuste isoleeritud vaatlemisel.

Teiselt poolt vektori $\bar{X}$ jaotusest lähtudes on võimalik leida ka vektori üksikute komponentide jaotusi. Tõepoolest,

$$P_{X_i}(A) = P_{\bar{X}}\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} R_j \times A_i\Big), \qquad (1)$$

kus $A_i \subset R_i$ (R_i on juhusliku suuruse X_i väärtusi sisaldav kõigi reaalarvude hulk R ; indeks i on lisatud üksnes ruumide järjestuse märkimiseks nende otsekorrutises). Hulk $\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} R_j \times A_i$ on seega silinder ruumis R^n, ja seos $X(\omega)\in \prod_{j=1, j\neq i}^{n} R_j \times A_i$ näitab, et juhusliku vektori X komponendi X_i väärtused paiknevad teatavas hulgas A_i, kuna ülejäänud komponendid võivad omandada suvalisi väärtusi. Seose (1) kehtivus järeldub tõenäosusmõõdu <u>kooskõlastatusest</u> (vt. II 6.4).

<u>Näide 6.</u> Defineerime n-dimensionaalse ühtlase jaotuse. Selleks fikseerime hulga $A^* \subset R^n$; olgu selle hulga ruum-

ala (Boreli mõõt) V, $(0 < V < \infty)$.

Siis
$$P_{\bar{X}}(A) = \frac{\mu(A^* \cap A)}{V},$$
kus μ on hulga A ruumala (Boreli mõõt).

Näide 7. Polünomiaaljaotus. Vaatleme n sõltumatust katsest koosnevat seeriat, kusjuures igal katsel on k võimalikku tulemust: $A_1,\dots,A_k$, $P(A_i) = p_i$ $(i=1,\dots,k)$, mis ei sõltu katse järjekorranumbrist või eelmiste katsete tulemustest. Sellise katseseeria abil me saame kirjeldada k-dimensionaalse juhusliku vektori $\bar{X} = (X_1,\dots,X_k)$, kusjuures vektori iga üksik komponent näitab, mitu korda esines katseseeria vältel i-s katsetulemus $A_i (i=1,2,\dots,k)$. Ilmselt võib iga X_i omandada üksnes täisarvulisi väärtusi $0,1,\dots,n$, ning tema jaotust kirjeldab binomiaaljaotus:
$$P(X_i = k) = C_n^k \, p_i^k (1-p_i)^{n-k} \quad (i=1,\dots,k).$$

Sellest on aga vähe kogu juhusliku vektori muutumise kirjeldamiseks: näiteks tuleb meil juhusliku vektori jaotuse juures arvesse võtta, et on võimatu selline vektori väärtus, kus kõigi komponentide väärtuseks on 0 või n.

Binomiaaljaotuse tuletamisega analoogiline arutelu annab meile jaotuse:
$$P_x(r_1,r_2,\dots,r_k) = \\ = P(X_1=r_1, X_2=r_2,\dots,X_k=r_k) = \begin{cases} \dfrac{\prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i} \cdot (r_i)!}{n!}, & \text{kui } \sum_{i=1}^{k} r_i = n, \\ 0, & \text{kui } \sum_{i=1}^{k} r_i \neq n. \end{cases}$$

Selle valemiga kirjeldatud jaotust nimetatakse polünomiaaljaotuseks.

<u>Näide 8.</u> Normaaljaotus. Olgu $\vec{m}$ n-dimensionaalne vektor ning B suvaline sümmeetriline positiivselt määratud n-järku ruutmaatriks; $A \subset R^n$. Siis seos

$$P_X(A) = \frac{\sqrt{|B|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})'B(\vec{x}-\vec{m})} d\vec{x} ,$$

kus x on n-dimensionaalne vektor, integraali mõistetakse aga n-kordsena, määrab n-mõõtmelise normaaljaotuse.

4. Juhuslike suuruste sõltumatus.

Vaatleme kahte samas sündmuste ruumis $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ defineeritud juhuslikku suurust: $X_1(\Omega \to R)$, $X_2(\Omega \to R)$. Teatavasti indutseerib neist kumbki ruumis R σ-algebra, s. t. samast ruumist R on saadud ~~kaks~~ erinevat tõenäosusruumi $(R, \mathcal{C}_{X_1}, P_{X_1})$ ja $(R, \mathcal{C}_{X_2}, P_{X_2})$.

Juhuslikke suurusi X_1 ja X_2 nimetatakse <u>sõltumatuteks</u>, kui nende poolt indutseeritud σ-algebrad $\mathcal{C}_{X_1}$ ja $\mathcal{C}_{X_2}$ on sõltumatud. See tähendab, et mistahes kaks hulka, millest üks kuulub σ-algebrasse $\mathcal{C}_{X_1}$, teine - σ-algebrasse $\mathcal{C}_{X_2}$, on sõltumatud. Sündmuste sõltumatuse definitsiooni kasutamiseks tuleb meil vaadelda jaotusi defineerivaid mõõte sündmuste ruumis: sündmused A ja B on sõltumatud, kui

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) ,$$

meie juhul: sündmused $A_1 \in \mathcal{C}_{X_1}$ ja $A_2 \in \mathcal{C}_{X_2}$ on sõltumatud, kui

$$P_{X_1}(A_1)\cdot P_{X_2}(A_2) = P(\omega: X_1(\omega)\in A_1)P(\omega: X_2(\omega)\in A_2) =$$
$$= P(\omega: (X_1(\omega)\in A_1)\cap(X_2(\omega)\in A_2)) . \qquad (2)$$

Kui võrdus (2) peab paika suvaliste hulkade $A_1, A_2 \subset R$, $A_1 \in \mathcal{C}_{X_1}$, $A_2 \in \mathcal{C}_{X_2}$ korral, osutuvad X_1 ja X_2 sõltumatuteks.

Paneme aga tähele, et võrduse (2) parem pool kirjeldab sisuliselt juhusliku vektori $\bar{X} = (X_1, X_2)$ jaotust ruumis $R \times R = R^2$; tõepoolest:

$$P(\omega: (X_1(\omega)\in A_1)\cap(X_2(\omega)\in A_2)) = P_{X_1,X_2}(A_1 \times A_2) .$$

Seega näeme, et saime kahe juhusliku suuruse sõltumatuse jaoks veel teisegi, eeltooduga samaväärse määratluse: kaks juhuslikku suurust on sõltumatud, kui nende ühine jaotus avaldub nende jaotuste korrutisena. Siinjuures tuleb muidugi tähele panna, et sellisel viisil on võimalik ühist jaotust määratleda üksnes ristkülikutes $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathcal{C}_{X_1}$, $A_2 \in \mathcal{C}_{X_2}$.

Enam kui kahe juhusliku suuruse sõltumatuse määratlemisel on mitu võimalust:

1) öeldakse, et juhuslikud suurused $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on paarikaupa sõltumatud, kui nende poolt indutseeritud σ-algebrad $\mathcal{C}_{X_1}, \ldots, \mathcal{C}_{X_n}$ on paarikaupa sõltumatud;

2) öeldakse, et juhuslikud suurused $X_1, \ldots, X_n$ on täielikult sõltumatud, kui nende poolt indutseeritud σ-algebrad $\mathcal{C}_{X_1}, \ldots, \mathcal{C}_{X_n}$ moodustavad täielikult sõltumatute klasside süsteemi.

Esimesel juhul kehtib seos:

$$P_{X_i}(A_i)P_{X_j}(A_j) = P_{X_i X_j}(A_i \times A_j)$$

iga i, j, $i \neq j$ korral vaadeldavast süsteemist. Teisel juhul kehtib veel ka seos:

$$\prod_{j=1}^{k} P_{X_{i_j}}(A_{i_j}) = P_{X_{i_1},\ldots,i_k}\left(\prod_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)$$ iga hulga $(i_1,\ldots,i_k) \subset$

$\subset (1,\ldots,n)$ korral, $k = 1,2,\ldots,n$.

5. Juhusliku vektori funktsioon ja selle jaotus.

Olgu tõenäosusruumis $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ defineeritud juhuslik vektor $\bar{X}(\Omega \to R^n)$; $\bar{X} = (X_1,\ldots,X_n)$. Olgu $g(R^n \to R)$ n reaalsest argumendist sõltuv reaalarvuliste väärtustega mõõtuv funktsioon . Siis on $Y(\Omega \to R), Y = g(\bar{X})$ juhuslik suurus (mõõtuv funktsioon mõõtuvast funktsioonist on mõõtuv, vt. II, teoreem 3.9; ühtlasi on funktsioon Y määratud tõenäosusruumis Ω) .

Vaatleme, kuidas määrata juhuslike suuruste $\bar{X}$ ja Y jaotuste vaheline seos, täpsemalt – leida Y jaotus avaldatuna $\bar{X}$ jaotuse kaudu.

Kasutades jaotuse definitsiooni, saame:

$$P_Y(A) = P(\omega : Y(\omega) \in A) = P(\omega : g(\bar{X}(\omega)) \in A) =$$
$$= P(\omega : \bar{X}(\omega) \in g^{-1}(A)) = P_{\bar{X}}(g^{-1}(A)) .$$

Peame silmas, et $A \subset R$, kuid $g^{-1}(A) \subset R^n$.

Seega on juhusliku vektori funktsiooni jaotus alati avaldatav juhusliku vektori jaotuse kaudu. Jaotusi siduva valemi efektiivsus (s. t. rakendatavus) sõltub sellest, kas hulk $g^{-1}(A)$ on efektiivselt avaldatav ruumis R^n . Üldjuhul on see hulk küllaltki keeruka konstruktsiooniga.

Erijuhul, kui vektor $\vec{X}$ on ühedimensionaalne, funktsioon g üksühene ning tema pöördfunktsioon analüütiliselt esitatav, on probleem alati efektiivselt lahenduv. Tõepoolest, siis

$$X(\Omega \to R), \quad Y(\Omega \to R), \quad g(R \to R), \quad g^{-1}(R \to R), \quad \text{ning}$$
$$P_Y(A) = P_X(g^{-1}(A)), \quad \text{kus} \quad A, g^{-1}(A) \subset R .$$

6. Ülesandeid.

1. Mis puhul on kaks juhuslikku suurust $X_1(\Omega \to R)$ ja $X_2(\Omega \to R)$ ekvivalentsed, kui leidub vaid üks punkt $\omega \in \Omega$ nii, et $X_1(\omega) \neq X_2(\omega)$?

2. Kas kahe juhusliku suuruse summa vahe, korrutis ja jagatis on juhuslikud suurused?

3. Tõestada, et ekvivalentsusseos on sümmeetriline ja transitiivne.

4. Jaotus (kui mõõt) on hulgafunktsioon. Kuidas tõlgendada sellest seisukohast lihtfunktsiooni jaotust, mis omistab üksikutele punktidele $r_i \in R$ nende väärtused?

5. Olgu meil antud jaotus:

0	1	2	3	5
0,5	0,2	0,15	0,10	0,05

Konstrueerida kolm erinevat juhuslikku suurust, millel oleks selline jaotus.

6. Juhusliku suuruse $X(\Omega \to R)$ jaotust nimetatakse nullpunkti suhtes sümmeetriliseks (ja vastavalt juhuslikku suurust X samuti), kui $P_X([a,b]) = P_X([-b,-a])$ iga lõigu $[a,b] \subset R$ korral.

Milliste parameetri väärtuste korral on jaotused näidetes 1. - 5. sümmeetrilised? Kas neist mõni ei ole kunagi sümmeetriline?

7. Jaotust nimetatakse sümmeetriliseks punkti c suhtes, kui $P_X([a+c,b+c]) = P_X([c-b,c-a])$. Millisel juhul on jaotused 1 - 5 sümmeetrilised mingi punkti c suhtes? Määrata see punkt!

8. Olgu ruumid $R^{k_1}, R^{k_2},\dots,R^{k_l}$ ruumi R^n alamruumid. Olgu ruumides R^{k_i} määratud tõenäosus P_{k_i}. Millisel juhul saab nende tõenäosusmõõtude abil määrata tõenäosusmõõdu ruumis R^n ?

9. Kuidas saab ülesande 8 lahendust rakendada jaotuste korral?

10. Kas polünomiaaljaotusega vektori koordinaadid on omavahel sõltumatud?

11. Tuletada kahedimensionaalse normaaljaotuse valem eeldusel, et koordinaadid on sõltumatud. Kuidas tuleks sel juhul tõlgendada parameetreid m ja B ?

12. Tuletada n-dimensionaalse normaaljaotuse valem eeldusel, et koordinaadid on sõltumatud. Kuidas tuleks sel juhul tõlgendada parameetreid m ja B?

13. Tuletada 2-dimensionaalse Poissoni jaotuse valem eeldusel, et koordinaadid on sõltumatud.

14. Tuletada 2-dimensionaalse ühtlase jaotuse valem eeldusel, et koordinaadid on sõltumatud. Võrrelda saadud valemit näites 6 tooduga.

15. Olgu $X \sim U(0,1)$, $Y \sim U(0,1)$, X ja Y sõltumatud.

Leida $Z = \max(X,Y)$ jaotus ja $W = \min(X,Y)$ jaotus.

16. Olgu $X \sim U(0,a)$, $g = \sin x$. Leida $P_{g(X)}$.

§ 3. J a o t u s f u n k t s i o o n.

1. Jaotusfunktsioon kui jaotuse esitus.

Juhuslikke suurusi iseloomustavad teatavasti nende jaotused. Jaotus on aga matemaatilises mõttes küllaltki raskesti käsiteldav objekt: jaotusele kui hulgafunktsioonile ei ole võimalik rakendada matemaatilise analüüsi aparatuuri. Selline olukord on iseloomulik kõikidele mõõtudele. Seetõttu on tekkinud vajadus mõõtude esituste, s. t. mõõduga üksüheses vastavuses olevate punktifunktsioonide $F(R \to R)$ defineerimiseks.

Juhusliku suuruse X jaotusele P_X on vastavusse seatud juhusliku suuruse jaotusfunktsioon $F_X(x)$.

Vaadeldes jaotuse väärtusi kõikvõimalikel poollõikudel $[a,b)$ saame määratleda funktsiooni kahe punkti, a ja b jaoks:

$$F_X(a,b) = P_X[a,b).$$

Esitades selle funktsiooni kahe funktsiooni vahena saame seose:

$$F_X(b) - F_X(a) = P_X[a,b), \qquad (1)$$

mis määrab funktsiooni $F_X(x)$ üheselt kuni liidetava konstandi täpsuseni. Rajatingimuse konstandi määramiseks saame seosest:

$$F_X(b) = F_X(b) - F_X(-\infty) = P_X(-\infty, b), \qquad (2)$$

mida võime lugeda samuti jaotusfunktsiooni definitsiooniks, kuna see määrab üheselt jaotusfunktsiooni iga reaalarvu b jaoks.

Ühtlasi on sellega määratud, et

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0 .$$

Jaotusfunktsiooni võiksime määrata ka mõõdu järgi sündmuste ruumis $(\Omega, \mathcal{C}, P)$, kuigi ta selle ruumi konkreetsest olemusest mingil määral ei sõltu, samuti kui jaotuski. Kasutades jaotuse definitsiooni, saame:

$$F_X(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\} .$$

Et Newton-Leibnizi valemi kohaselt

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b dF(x) ,$$

funktsioon $F_X(x)$ on reaalse argumendiga reaalarvuline funktsioon, mis, nagu selgub, on tõkestatud variatsiooniga, (seega on märgitud valemi kasutamine õigustatud), siis kehtib seos:

$$P_X [a,b) = \int_a^b dF(x) ,$$

kusjuures integreerimisel tuleb alumise raja väärtus kaasa arvata, ülemise raja väärtus aga arvestamata jätta.

2. Jaotusfunktsiooni omadusi.

Juhusliku muutuja X jaotusfunktsioonil $F_X(x)$ on järgmised omadused:

1° $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

Esimene piirväärtus järeldub definitsioonist. Leiame teise: $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = \lim_{x \to \infty} P_X(-\infty, x) = P_X(R) = 1$, sest P_X on tõenäosusmõõt.

2^0 $F_X(x)$ on mittekahanev funktsioon.

Tõepoolest, olgu $x_1 < x_2$. Siis $F_X(x_1) = P_X(-\infty, x_1)$, $F_X(x_2) = P_X(-\infty, x_2)$, $(-\infty, x_1) \subset (-\infty, x_2)$. Tulemus järeldub mõõdu monotoonsusest. Siit järeldub, et funktsioon $F_X(x)$ on tõkestatud väärtustega 0 ja 1.

3^0 $F_X(x)$ on vasakult pidev.

Tõestus:

$$\lim_{h \to 0+} [F_X(x) - F_X(x-h)] = \lim_{h \to 0+} P_X[x-h, x) =$$

$$= P_X[x, x) = P_X(\emptyset) = 0 .$$

Tuleb märkida, et üldiselt ei tarvitse jaotusfunktsioon olla paremalt pidev.

4^0 Igale omadustega $1^0 - 3^0$ reaalarvuliste väärtustega funktsioonile $F(x)$ vastab mingi juhusliku muutuja X jaotus P_X.

Tõepoolest, määrates seose (1) põhjal hulgafunktsiooni P_X kõigi poollõikude jaoks, on lihtne kontrollida, et saadud hulgafunktsioon on jaotusfunktsiooni omaduse 2 tõttu mittenegatiivne. Lihtne on vahetult kontrollida ka hulgafunktsiooni P_X σ-aditiivsust; omadusest 1^0 järeldub, et $P_X(R) = 1$, seega on saadud hulgafunktsioon jätkatav tõenäosusmõõduks hulkade klassil $\mathcal{C}[a,b)$, s.t. Boreli hulkade σ-algebral $\mathcal{B}$.

Igale jaotusele saab aga, nagu me juba nägime, vastavusse seada lõpmata palju erinevaid juhuslikke suurusi.

5° Jaotusfunktsioonil on ülimalt loenduv hulk katkevuspunkte.

Olgu jaotusfunktsioonil punktis x_α katkevus. Kuna funktsioon on tõkestatud ja monotoonne, peab funktsioon selles punktis tegema lõpliku hüppe; olgu selle suurus p_α :

$$F_X(x_\alpha +0) - F_X(x_\alpha) = p_\alpha .$$

Vaatle mingit lõiku $[a,b)$. Ilmselt $\sum_{a \leq x_\alpha < b} p_\alpha \leq F(b) - F(a) \leq 1$. Iga naturaalarvu m jaoks leidub vaid lõplik arv k_m punkte x_α nii, et $\frac{1}{m-1} \leq p_\alpha < \frac{1}{m}$. Seega on meil võimalik kõik katkevuspunktid lõigul $[a,b)$ järjestada, s.t. neid on loenduv hulk. Et kogu sirge $(-\infty, \infty)$ on esitatud loenduva hulga lõpliku pikkusega lõikude kaudu, on ka kogu sirgel üksnes loenduv hulk katkevuspunkte.

Siinjuures tuleb märkida, et on võimalik konstrueerida jaotusfunktsioon, mille katkevuspunktide hulk on kõikjal tihe. Selleks järjestame mingil viisil kõigi ratsionaalarvude hulga, omistades igale ratsionaalarvule järjekorranumbri n : $\{r_n, n = 1,2,...\}$. Jaotusfunktsiooni defineerime järgmiselt: olgu ta treppfunktsioon, kusjuures punktis r_n sooritagu ta hüppe $p_n = 2^{-n}$, pidevuspunktides olgu konstantne. Sellisel defineeritud funktsiooni korral

$$F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 ,$$

seega on meil tegemist jaotusfunktsiooniga, kui me vaid loeme $F_X(-\infty) = 0$.

Kuna sirgel on mitteloenduv hulk punkte, siis on jaotusfunktsiooni pidevuspunktide hulk mitteloenduv ja seega ka kõikjal tihe.

3. Jaotusfunktsiooni lahutus.

Olgu meil antud jaotusfunktsioon $F_X(x) = F(x)$.
Defineerime tema hüpete funktsiooni $F_d(x) = \sum\limits_{x_\alpha < x} p_\alpha$.
Näeme, et hüpete funktsioonil on järgmised omadused:

1' $\lim\limits_{x \to -\infty} F_d(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F_d(x) = \sum\limits_{-\infty < x_\alpha < \infty} p_\alpha \leq$
$\leq F(\infty) = 1$;

2' $F_d(x)$ on mittekahanev;

3' $F_d(x)$ on vasakult pidev:

$$F_d(x) - F_d(x-0) = \lim_{x' \to x-0} \sum_{x' \leq x_\alpha < x} p_\alpha = 0.$$

Funktsiooni F, mis rahuldab tingimusi 1' - 3', nimetame üldistatud jaotusfunktsiooniks. Üldistatud jaotusfunktsioon määrab ruumis R mõõdu, mis ei tarvitse olla tõenäosusmõõt. Funktsioon F_d on üldistatud jaotusfunktsioon. (Miks?) Funktsiooniga F_d määratud mõõdu tähistame sümboliga P_d :

$$P_d[a,b) = F_d(b) - F_d(a) ,$$
$$P_d(R) = \lim_{x \to \infty} F_d(x) .$$

Vaatleme nüüd vahet $F(x) - F_d(x) = F_c(x)$.
Osutub, et

1' $\lim\limits_{x \to -\infty} F_c(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F_c(x) = 1 - F_d(-\infty) \leq 1$;

2' $F_c(x)$ on mittekahanev:

kuna $\sum\limits_{a \leq x_\alpha < b} p_\alpha \leq F(b) - F(a)$ iga a ja b korral, siis

$$F_c(x_2) - F_c(x_1) = F(x_2) - F(x_1) - \sum_{x_1 \leq x < x_2} p_\alpha > 0$$

iga $x_1 < x_2$ korral.

3' F_c on pidev (kõik funktsiooni $F(x)$ katkevuskohad on eraldatud). Siit järeldub, et F_c on ühtlasi ka vasakult pidev, seega on F_c üldistatud jaotusfunktsioon. Ka F_c määrab ruumis R mõõdu:

$$P_c\,[a,b) = F_c(b) - F_c(a)\ .$$

Näeme, et iga juhusliku muutuja jaotusfunktsioon on esitatav kahe üldistatud jaotusfunktsiooni summana:

$$F(x) = F_c(x) + F_d(x)\ ,$$

neist esimene on pidev, teine aga treppfunktsioon.

Juhul, kui

$$F_c(x) \equiv 0\ ,$$

kehtib samasus

$$F(x) \equiv F_d(x)$$

ning meil on tegemist diskreetse juhusliku suurusega (juhuslik suurus on liht- või elementaarfunktsioon sõltuvalt sellest, kas katkevuspunktide arv on lõplik või lõpmatu).

Juhul, kui

$$F_d(x) \equiv 0\ ,$$

kehtib samasus

$$F(x) \equiv F_c(x)$$

ning meil on tegemist juhusliku suurusega, mille iga väärtuse tõenäosus on null.

Vaatleme mõõtu P_c mõõtuvas ruumis $(R, \mathcal{B}, \mu)$. Lebesgue'i teoreemi kohaselt on see mõõt esitatav kahe mõõdu summana selles ruumis, kusjuures üks neist mõõtudest on μ-pidev, teine aga μ-singulaarne. Tähistame need mõõdud vastavalt sümbolitega P_a ja P_s, s. t.

$$P_c(B) = P_a(B) + P_s(B)$$

iga $B \in \mathcal{B}$, s. t. Boreli mõttes mõõtuva hulga korral.

Mõõtudel P_a ja P_s eksisteerivad omakorda esitused ruumis R; need on üldistatud jaotusfunktsioonid, mis on vastavalt defineeritud seosega (1) ja (2) mõõtude P_a ja P_s abil. Tähistame need üldistatud jaotusfunktsioonid sümbolitega

$$F_a(x) \text{ ja } F_s(x) .$$

<u>Teoreem 1</u>. Olgu P_a μ-pidev mõõt. Siis on mõõdu P_a esitus $F_a(x)$, mis on määratud seostega (1) ja (2), absoluutselt pidev funktsioon.

<u>Tõestus</u>. Meenutame, et funktsiooni $F(x)$ nimetatakse absoluutselt pidevaks, kui iga positiivse arvu ε jaoks eksisteerib selline arv δ, et iga naturaalarvu n ja suvalise ühisosata lõikude süsteemi $[a_1,b_1], \ldots, [a_n,b_n]$ korral

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon , \quad \text{kui} \quad \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \quad (a_i < b_i) .$$

Tõepoolest, tähistame lõikude süsteemi $\bigcup_{i=1}^{n} [a_i,b_i] = B \in \mathcal{B}$ (s. o. Boreli mõttes mõõtuv hulk). Siis on

$$\sum_{k=1}^{n} |F_a(b_k) - F_a(a_k)| = P_a(B) ; \quad \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \mu(B) ;$$

ja väite õigsus järeldub vahetult mõõdu P_a μ-pidevusest.

Seega saame suvalise jaotusfunktsiooni $F(x)$ esitada kolme üldistatud jaotusfunktsiooni summana:

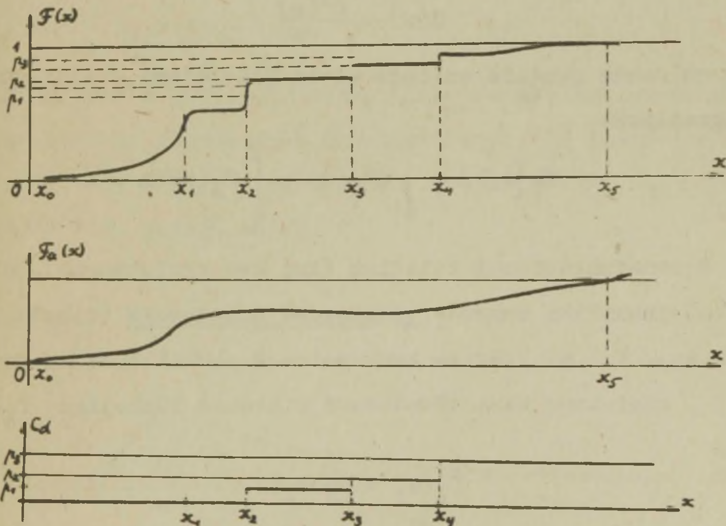
$$F(x) = F_a(x) + F_s(x) + F_d(x) ,$$

kusjuures esimene jaotusfunktsiooni komponent on absoluutselt pidev, teine - singulaarne ja kolmas treppfunktsioon.

Analüüsime lähemalt veel jaotusfunktsiooni singulaarset komponenti. Teatavasti järeldub mõõtude P_s ja μ singulaarsusest, et leidub hulk R_s nii, et $\mu(R_s) = 0$, kus P_s võib omandada nullist erinevaid väärtusi, kuna ülejäänud hulgal $R \setminus R_s$ on P_s null. Nimetame seda hulka R_s üldistatud jaotusfunktsiooni $F_s(x)$ kasvupunktide hulgaks.

Seega on funktsioon $F_s(x)$ peaaegu kõikjal konstantne, muutudes (kasvades) üksnes hulgal mõõduga null. Sealjuures on ta aga pidev.

Skemaatiliselt võiks jaotusfunktsiooni $F_X(x)$ ja ta komponente kujutada järgmiselt (vt. joonis 65); tuleb märkida,



Joon. 65.

et komponenti $F_s(x)$ illustreerida pole võimalik; punktid x_1 ja x_2, kus funktsiooni $F_X(x)$ puutuja on vertikaalne, on funktsiooni $F_s(x)$ kasvupunktid, kuid selleks, et $C_s(x) \neq 0$, on tarvis, et selliseid (diskreetselt asetsevaid) punkte oleks lõpmata palju.

4. Tõenäosuse tihedus.

Eriti suurt praktilist huvi pakub jaotusfunktsioonide korral olukord, kui

$$F_s(x) \equiv F_d(x) \equiv 0 ,$$

$$F(x) \equiv F_a(x) ,$$

s. t. jaotusfunktsioon on absoluutselt pidev. Niisugust juhuslikku suurust nimetatakse sageli pidevaks. Sel korral eksisteerib jaotusfunktsioonil tuletis

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

ning me saame jaotuse esitada mitte Stieltjesi, vaid Lebesgue'i integraalina:

$$P_X[a,b) = \int_a^b dF_X(x) = \int_a^b f_X(x)dx . \qquad (3)$$

Jaotusfunktsiooni tuletist (kui see eksisteerib), nimetatakse juhusliku suuruse tõenäosuse tiheduseks (tihedusfunktsiooniks). Kui me räägime konkreetsest juhuslikust suurusest $X(\omega)$, tähistame tema tõenäosuse tiheduse sümboliga $f_X(x)$, seega

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) .$$

Olgu märgitud, et tõenäosuse tiheduse eksisteerimine tuleneb Radon-Nikodymi teoreemist: μ-pidev mõõt P_X on esitatav teatava funktsiooni $f(x)$ määramatu integraalina:

$$P_X(A) = \int_A f(x)\mu(dx) .$$

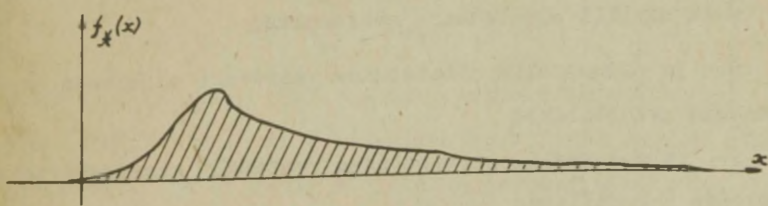
Siin me tähistame ruumi R elementi tavakohaselt sümboliga x ; juhul, kui dx on vahemik reaalteljel, on Lebesgue'i mõõdu definitsiooni kohaselt $\mu(dx) = dx$, seega saame valemist (3) mõnevõrra üldisema valemi, mis kehtib mistahes Boreli mõttes mõõtuva hulga A korral, muidugi ka seosega (3) toodud erijuhul, kui $A = [a,b)$. Jaotusfunktsiooni diferentseeruvus vaadeldaval juhul järeldub ka tema absoluutsest pidevusest.

Tihedusfunktsioonil on järgmised olulised omadused:

1^o $f_X(x) \geqslant 0$, $x \in R$;

2^o $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

Esimene omadus järeldub jaotusfunktsiooni monotoonsusest; teise omaduse tõestamisel kasutame seost (3) juhul $[a,b) = (-\infty, \infty) = R$, ning asjaolu, et jaotus P_X on tõenäosusmõõt (vt. joonis 66).



Joon. 66.

5. Kvantiilid.

Mitmesuguste praktiliste probleemide lahendamisel pakub huvi jaotusfunktsiooni pöördfunktsioon, s. t. tuleb leida võrrandi

$$F_X(x) = p$$

lahend x, kus $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Kui selline üheselt määratud lahend x_p eksisteerib, siis nimetatakse seda väärtust juhusliku suuruse X p-kvantiiliks.

Ilmselt on kvantiili eksisteerimiseks piisav, et $F_X(x)$ on piirkonnas $R_o = \{ x : 0 < F_X(x) < 1 \}$ rangelt monotoonne, ammugi siis, et tõenäosuse tihedus eksisteerib iga x väärtuse korral ja on alati nullist erinev.

Antud konkreetse p jaoks on kvantiili eksisteerimiseks tarvilik ja piisav, et eksisteerib vahemik (x_{p_1}, x_{p_2}) nii, et $p_1 < p < p_2$ ja F_X on vahemikus (x_{p_1}, x_{p_2}) rangelt monotoonne.

Kasutades kvantiili jaoks definitsiooni

$$x_p = \inf (x : F_X(x) = p) ,$$

võime kvantiilid määrata igale juhuslikule suurusele.

Erilist huvi pakuvad mõningad konkreetsed kvantiilid:

$\frac{1}{2}$-kvantiili nimetatakse mediaaniks;

$\frac{1}{4}$- ja $\frac{3}{4}$-kvantiile nimetatakse vastavalt alumiseks ja ülemiseks kvantiiliks;

$\frac{1}{6}$- ja $\frac{5}{6}$-kvantiile nimetatakse vastavalt alumiseks ja ülemiseks sekstiiliks;

$\frac{1}{10}$-kvantiili nimetatakse detsiiliks.

Ilmselt iseloomustab vahe $x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}}$ teatud määral juhusliku suuruse väärtuste hajuvust; mida suurem nimetatud vahe on, seda hajuvamad on juhusliku suuruse väärtused (üldiselt). Seetõttu kasutatakse seda vahet mõnikord matemaatilises statistikas juhusliku suuruse hajuvuse iseloomustamiseks.

6. Jaotusfunktsioonide jada koonduvus.

Koonduv ·e mõisteid, mida me kasutame jaotusfunktsioonide jada korral, on võimalik defineerida ka ulatuslikumas funktsioonide klassis. Olgu selleks tõkestatud monotoonselt kasvavate funktsioonide $F(x)$ klass $\mathcal{F}$, kus $f(R \to R)$ Selliste funktsioonide hulka kuuluvad üldistatud jaotusfunktsioonid, viimaste erijuhtudena ka jaotusfunktsioonid.

Märgime, et iga funktsioon $F(x) \in \mathcal{F}$ määrab üheselt üldistatud jaotusfunktsiooni $F^*(x)$. Tõepoolest, olgu $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = K$ ja funktsioon $F(x)$ katkegu punktides $x_i (i=1,2,\ldots)$. Defineerime funktsiooni $F^*(x)$ seostega:

$$F^*(x) = F(x) - K, \quad x \neq x_i,$$

$$F^*(x_i) = \lim_{\substack{x_n' \to x_{i-0}, \\ x_n' \in C(F)}} F(x_n') - K, \quad i=1,2,\ldots .$$

Saadud funktsioon $F^*(x)$ osutub vasakult pidevaks, $\lim\limits_{x \to -\infty} F^*(x) = 0$ ning ta kuulub koos funktsiooniga $F(x)$ klassi $\mathcal{F}$, ja on seega üldistatud jaotusfunktsioon.

Nimetame hulka $C(F) \in R$ funktsiooni $F(x)$ pidevuspunktide hulgaks, kui $F(x)$ on pidev alati, kui $x \in C(F)$.

Vaatleme funktsioonide $F_k(x)$ hulka, $F_k(x) \in \mathcal{F}$ ning funktsiooni $F(x) \in \mathcal{F}$.

Me ütleme, et funktsioonide jada $F_k(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ <u>koondub nõrgalt</u> funktsiooniks $F(x)$, kui see jada koondub funktsiooniks $F(x)$ hulgal $C(F)$. See tähendab, et iga punkti $x^* \in C(F)$ korral on reaalarvude jada

$$F_1(x^*),\ F_2(x^*), \ldots, F_n(x^*), \ldots$$

koonduv reaalarvuks $F(x^*)$.

Osutub, et funktsioonide jada nõrgaks koonduvuseks on piisav ka selle funktsioonide jada koonduvus mingil hulgal D, mis on ruumis R kõikjal pidev.

Erijuhul, kui funktsioonide jada koosneb jaotusfunktsioonidest $F_{X_n}(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ ning ka piirväärtuseks on jaotusfunktsioon $F_X(x)$, ütleme, et jaotusfunktsioonide jada $F_{X_n}(x)$ koondub nõrgalt jaotusfunktsiooniks $F_X(x)$.

Osutub, et siinjuures on tarvis eriti nõuda, et ka piirfunktsioon $F(x)$ oleks jaotusfunktsioon: nimelt võib esineda jaotusfunktsioonide $F_{X_n}(x)$ nõrgalt koonduv jada, mille piirfunktsioon $F(x)$ ei ole jaotusfunktsioon. Veendume selles näite abil:

Defineerime jaotusfunktsioonid $F_{X_k}(x)$ seosega:

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -n, \\ \frac{1}{2}, & -n < x \leq n, \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

On lihtne kontrollida, et kõik sellised funktsioonid on jaotusfunktsioonid: nad on vasakult monotoonsed, mittekahanevad ja $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X_n}(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F_{X_n}(x) = 1$.

Ilmselt on sellise jada piirfunktsiooniks funktsioon

$$F(x) \equiv \frac{1}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

mis aga pole jaotusfunktsioon, sest ta piirväärtusteks on $\frac{1}{2}$ nii juhul $x \to +\infty$ kui ka juhul $x \to -\infty$.

Kontrollime, kas meil on tegemist nõrga koonduvusega. Ilmselt $C(F) = R$, seega peaks koondumine aset leidma iga reaalarvu $x \in R$ korral. Valime mingi arvu $x^o \in R$. Siis leidub kindlasti naturaalarv n^o nii, et

$$x^o \in [-n_o, n_o) \setminus [-n_o + 1, n_o - 1).$$

Jadaks $F_{X_1}(x^o), F_{X_2}(x^o), \ldots$

on vaadeldaval juhul, kui $x_o < 0$, jada

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n^o - 1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots;$$

kui aga $x^o > 0$, jada:

$$\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n^o - 1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$$

Ilmselt on mõlemal juhul saadud reaalarvude jadad koonduvad ja meil on tegemist nõrga koonduvusega.

Selleks, et garanteerida jaotusfunktsioonide jada koonduvus jaotusfunktsiooniks, tuleb meil nõuda veel tingimuste:

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(-\infty) = F_X(-\infty), \quad \lim_{n \to \infty} F_{X_n}(+\infty) = F_X(+\infty) \qquad (4)$$

täidetust.

Nõrka koonduvust, mille korral on täidetud tingimused (4), nimetatakse <u>täielikuks koonduvuseks</u>. Täielikult koonduva jaotusfunktsioonide jada piirväärtuseks on alati jaotusfunktsioon.

7. Helly teoreemid.

Esitame siin veel mõningad edaspidiseks vajalikud teoreemid juhuslike suuruste jaotusfunktsioonide koonduvuse kohta.

Teoreem 2 (Helly teoreem). Kui leidub lõpmatu hulk funktsioone $F_\alpha(x) \in \mathcal{F}$ ning mingi lõplik konstant c nii, et $|F_\alpha(x)| < c$ iga α korral, siis leidub sellesse hulka kuuluvate funktsioonide jada $F_n(x)$, mis koondub nõrgalt mingiks piirfunktsiooniks $F(x) \in \mathcal{F}$.

Tõestus. Olgu D mingi hulgal R kõikjal tihe loenduv punktihulk, $D = \{x_i\ , i \in N\}$. Arvuhulk $\{F_\alpha(x_1)\}$, s. t. kõigi funktsioonide F_α väärtuste hulk kohal x_1, on meie eelduse kohaselt tõkestatud, järelikult leidub selle elementidest koosnev koonduv arvujada $F_{1i}(x_1)$ $(i = 1,2,\ldots)$, mille piirväärtuse tähistame sümboliga $F(x_1)$:

$$\lim_{i \to \infty} F_{1i}(x_1) = F(x_1) .$$

Vaatleme nüüd jadasse F_{1i} kuuluvaid funktsioone kohal x_2. Ka arvujada $F_{1i}(x_2)$ on tõkestatud, seega leidub tal kindlasti koonduv osajada $F_{2i}(x_2)$, mille piirväärtuse tähistame sümboliga $F(x_2)$. Saame nüüd:

$$\lim_{i \to \infty} F_{2i}(x_1) = F(x_1) , \quad \lim_{i \to \infty} F_{2i}(x_2) = F(x_2) .$$

Siinjuures kehtib esimene seostest sellepärast, et jada $F_{2i}(x)$ on punktis x_1 koonduva jada $F_{1i}(x)$ osajada.

Olgu meil leitud hulga $F_\alpha(x)$ elementidest koosnev jada $F_{ki}(x)$ nii, et

$$\lim_{i\to\infty} F_{ki}(x_j) = F(x_j) \quad (j = 1,2,\ldots,k) .$$

Moodustame siis jada $F_{ki}(x_{k+1})$ ning eraldame sellest koonduva osajada $F_{k+1,i}(x_{k+1})$, mille piirväärtuse tähistame sümboliga $F(x_{k+1})$. Saadud funktsioonide jadal $F_{k+1,i}(x)$ on omadus:

$$\lim_{i\to\infty} F_{k+1,i}(x_j) = F(x_j) \quad (j = 1,2,\ldots,k+1) .$$

Jätkame jadade $F_{ki}(x)$ $(i = 1,2,\ldots)$ väljavalimist, $k\to\infty$ ning moodustame seejärel nn. diagonaaljada $F_{ii}(x)$ $(i = 1,2,\ldots)$. Osutub, et

$$\lim_{i\to\infty} F_{ii}(x_j) = F(x_j) \quad (j = 1,2,\ldots) . \qquad (5)$$

Tõepoolest, fikseerime mingi suvalise punkti $x_j \in D$. Diagonaaljada $F_{ii}(x)$ kõik elemendid alates j-ndast kuuluvad jadasse $F_{ji}(x)$, seetõttu koondub see jada punktis x_j väärtuseks $F(x_j)$ ning kehtib seos (5).

Sellega on hulgal D defineeritud funktsioon $F(x)$ seosega (5). Et jada $F_{ii}(x)$ elemendid on ühtlaselt tõkestatud, on ka $F(x)$ tõkestatud; samuti järeldub sellest, et kõik funktsioonid $F_{ii}(x)$ on mittekahanevad, ka funktsiooni $F(x)$ mittekahanevus. (Tõestada iseseisvalt!)

Et hulk D on hulgal R kõikjal tihe, saame funktsiooni $F(x)$ jätkata ruumis R seosega

$$F(x) = \lim_{\substack{x_i \to x \\ x_i \in D}} F(x_i) \qquad (6)$$

iga $x \in R$ jaoks. Ka seosega (6) defineeritud funktsioon $F(x)$ $(x \in R)$ on tõkestatud ja mittekahanev. (Näidata seda!) Sellega ongi Helly teoreem tõestatud.

Teoreem 3 (Helly-Bray teoreem). Kui funktsioonide jada $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_i(x) \in \mathcal{F}$ koondub nõrgalt funktsiooniks $F(x)$, siis koondub iga pideva funktsiooni $g(x)$ korral integraalide jada $\int_a^b g(x)dF_n(x)$ integraaliks $\int_a^b g(x)dF(x)$, kui vaid $a,b \in C(F)$.

Tõestus. Olgu antud suvaline arv $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub indeks $N(\varepsilon)$ nii, et

$$\left| \int_a^b g(x)dF_n(x) - \int_a^b g(x)dF(x) \right| < \varepsilon$$

iga $n > N(\varepsilon)$ korral.

Funktsiooni $g(x)$ pidevuse tõttu lõigul $[a,b]$ on ta tõkestatud, ja leidub konstant G, mis rahuldab võrdust:

$$\max_{a \leq x \leq b} |g(x)| = G .$$

Jaotame nüüd lõigu $[a,b]$ osalõikudeks $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,1,\dots,m-1)$ nii, et igas osalõigus kehtiks võrratus

$$|g(x) - g(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (x_i \leq x < x_{i+1},\ i = 0,1,\dots,m-1) .$$

Seda on võimalik teha funktsiooni $g(x)$ pidevuse tõttu. Üldsust kitsendamata võime jaotuspunktid x_i valida nii, et nad kuuluvad hulka $C(F)$. Defineerime treppfunktsiooni $g_\varepsilon(x)$ järgnevalt:

$$g_\varepsilon(x) = g(x_i) , \quad (x_i \leq x < x_{i+1} ;\ i = 0,1,\dots,m-1) .$$

Ilmselt on igal osalõigul õige ka seos

$$|g(x) - g_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (a \leq x \leq b) .$$

Funktsioonide jada $F_i(x)$ koonduvust kasutades valime indeksi $N(\varepsilon)$ nii, et

$$\left|F_n(x_i) - F(x_i)\right| < \frac{\varepsilon}{6\,Gm} \quad (i = 0,1,\dots,m-1),$$

kui $n > N(\varepsilon)$.

Hindame nüüd vahet

$$\left|\int_a^b g(x)dF_n(x) - \int_a^b g(x)dF(x)\right| \leq \left|\int_a^b g(x)dF(x) - \int_a^b g_\varepsilon(x)dF(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_a^b g_\varepsilon(x)dF(x) - \int_a^b g_\varepsilon(x)dF_n(x)\right| + \left|\int_a^b g_\varepsilon(x)dF_n(x) - \right.$$

$$\left. - \int_a^b g(x)dF_n(x)\right|,$$

hinnates selleks ükshaaval parempoolse avaldise liidetavaid:

$$\left|\int_a^b g(x)dF(x) - \int_a^b g_\varepsilon(x)dF(x)\right| \leq \int_a^b \left|g(x) - \right.$$

$$\left. - g_\varepsilon(x)\right| dF(x) \leq \frac{\varepsilon}{3}\left(F(b) - F(a)\right) \leq \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\left|\int_a^b g_\varepsilon(x)dF_n(x) - \int_a^b g(x)dF_n(x)\right| \leq \int_a^b \left| g_\varepsilon(x) - \right.$$

$$\left. - g(x)\right| dF_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{3}\left(F_n(b) - F_n(a)\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Teise liidetava hindamisel kasutame aga võimalust treppfunktsiooni integreerimiseks, jaotades integreerimispiirkonna funktsiooni konstantsuse piirkondade summaks:

$$\left|\int_a^b g_\varepsilon(x)dF(x) - \int_a^b g_\varepsilon(x)dF_n(x)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_\varepsilon(x)dF(x) - \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_\varepsilon(x)dF_n(x)\right. =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{m-1} g(x_i)\left[F(x_{i+1}) - F(x_i)\right] - \sum_{i=0}^{m-1} g(x_i)\left[F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)\right] \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m-1} g(x_i)\left|F(x_{i+1}) - F_n(x_{i+1})\right| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} g(x_i)\left|F(x_i) - F_n(x_i)\right| \leq 2mG \frac{\varepsilon}{6\,Gm} = \frac{\varepsilon}{3} .$$

Tulemusi kokku võttes saame:

$$\left| \int_a^b g(x)dF_n(x) - \int_a^b g(x)dF(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon , \text{ kui } n > N(\varepsilon)$$

ja sellega ongi Helly-Bray teoreem tõestatud.

<u>Teoreem 4</u> (Helly-Bray üldistatud teoreem). Kui funktsioonide jada $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_i(x) \in \mathcal{F}$ koondub täielikult funktsiooniks $F(x)$, siis koondub iga pideva ja tõkestatud funktsiooni $g(R \to R)$ korral integraalide $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x)$ jada integraaliks $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$.

<u>Tõestus</u>. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Tähistame

$$G = \sup_{-\infty < x < \infty} |g(x)| .$$

Funktsioonide jada $F_i(x)$ täielikust koonduvusest järeldub, et kehtivad võrdused:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(-\infty) = F(-\infty) , \quad \lim_{n \to \infty} F_n(+\infty) = F(+\infty) ,$$

seega on meil võimalik valida nii suured arvud A ja N_1, et

$$|F_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{6G} , \text{ kui } x < -A, \ n > N_1 ,$$

ning B ja N_2 nii, et

$$|F_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{6G}, \quad \text{kui} \quad x > B, \quad n > N_2 .$$

Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $-A, B \in c(F)$. Hindame nüüd vahet

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) \right| ,$$

jaotades integreerimispiirkonna punktide $-A$ ja B abil osadeks ning hinnates integraalide vahet neis osades.

$$\left| \int_{-\infty}^{-A} g(x)dF_n(x) - \int_{-\infty}^{-A} g(x)dF(x) \right| = \left| g(-A)F_n(-A) - g(-\infty)F_n(-\infty) - \right.$$

$$\left. - g(-A)F(-A) + g(-\infty)F(-\infty) \right| \leqslant |g(-A)| \, |F_n(-A) - F(-A)| +$$

$$+ |g(-\infty)| \, |F_n(-\infty) - F(-\infty)| \leqslant 2G \frac{\varepsilon}{6G} = \frac{\varepsilon}{3} ,$$

kui $n > N_1$; analoogiliselt ka

$$\left| \int_{B}^{\infty} g(x)dF_n(x) - \int_{B}^{\infty} g(x)dF(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

kui $n > N_2$. Helly-Bray teoreemi põhjal on aga võimalik valida vastavalt arvudele $-A$, B ja $\frac{\varepsilon}{3}$ indeks $N_3 = N(\frac{\varepsilon}{3})$ nii, et

$$\left| \int_{-A}^{B} g(x)dF_n(x) - \int_{-A}^{B} g(x)dF(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} , \quad \text{kui} \quad n > N_3 .$$

Valides nüüd $N(\varepsilon) = \max(N_1, N_2, N_3)$ saamegi seose:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) \right| < \varepsilon ,$$

kui $n > N(\varepsilon)$, ja Helly-Bray üldistatud teoreem on tõestatud.

8. Juhuslike suuruste koonduvus.

Jaotusfunktsiooni kui juhusliku suuruse karakteristiku hindamisel on põhilise tähtsusega küsimuseks tema pidevus, s. t. küsimus, kas juhuslike muutujate jada (mingist) koonduvusest järeldub ka vastavate jaotusfunktsioonide jada (mingi) koonduvus ning vastupidi. Osutub, et sellisel viisil on omavahel seotud juhuslike muutujate jada koonduvus tõenäosuse järgi ja vastavate jaotusfunktsioonide jada täielik koonduvus. Kehtib nimelt järgmine teoreem:

Teoreem 5. Kui juhuslike suuruste jada $X_n(\omega)$ koondub tõenäosuse järgi juhuslikuks suuruseks $X(\omega)$, siis koondub vastavate jaotusfunktsioonide jada $F_{X_n}(x)$ täielikult jaotusfunktsiooniks $F_X(x)$.

Tõestus. Näitame kõigepealt, et koonduvus esineb hulgal $C(F)$. Valime mingid punktid $x, x' \in C(F)$, $x' < x$. Siis

$$F_X(x') = P(X < x') ,$$

$$F_{X_n}(x) = P(X_n < x) .$$

Kuid sündmus $\{\omega : X < x'\}$ on esitatav sündmuste summana: $\{\omega : X < x' , X_n < x\} \cup \{\omega : X < x' , X_n \geqslant x\} \subset \{\omega : X_n < x\} \cup \{\omega : |X_n - X| \geqslant x - x'\}$.

Kasutame siin esimese liidetava korral ilmset seost: $AB \subset B$. Teise liidetava puhul aga näeme, et võrratustest $X < x'$ ja $X_n \geqslant x$ järeldub võrratus $X_n - X \geqslant x - x'$, ammugi siis $|X_n - X| \geqslant x - x'$, järelikult on ka sündmuste $\{\omega : X < x' , X_n \geqslant x\}$ ja $\{\omega : |X_n - X| \geqslant x - x'\}$ vahel sisalduvusseos.

Saadud sisalduvusseosest järeldub võrratus tõenäosuste vahel:

$$P\{\omega : X < x'\} \leq P\{\omega : X_n < x\} + P\{\omega : X < x',\ X_n \geq x\};$$

(vaadeldavad sündmused on üksteist välistavad, seega saame kasutada tõenäosuse aditiivsust). Kasutades viimast sisalduvusseost, saame võrratuse

$$P\{\omega : X < x'\} \leq P\{\omega : X_n < x\} + P\{\omega : |X_n - X| \geq x - x'\}.$$

Jaotusfunktsiooni definitsiooni põhjal saame võrratuse kirjutada kujul

$$F_X(x') \leq F_{X_n}(x) + P\{\omega : |X_n - X| \geq x - x'\},$$

iga X_n korral. Seega ka

$$F_X(x') \leq \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) + P\{\omega : |X_n - X| \geq x - x'\}.$$

Kuna juhuslike suuruste jada X_n koondub tõenäosuse järgi juhuslikuks suuruseks X, siis iga $x' < x$ korral

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n - X| \geq x - x'\} = 0,$$

niisiis

$$F_X(x') \leq \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x),$$

kui vaid $x' < x$.

Teiselt poolt saame analoogilise mõttekäigu tulemusena:

$$F_{X_n}(x) = P\{\omega : X_n < x\} = P\{\omega : X_n < x, X < x''\} + P\{\omega : X_n < x,$$

$$X \geq x''\} \leq F_X(x'') + P\{\omega : |X_n - X| \geq x'' - x\},$$

millest järeldub, et

$$\limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x'').$$

Et iga x väärtuse korral

$$\liminf_{n \to \infty} F_{X_n}(x) \leq \limsup_{n \to \infty} F_{X_n}(x) ,$$

siis saame ahelvõrratuse:

$$F_X(x') \leq \liminf_{n \to \infty} F_{X_n}(x) \leq \limsup_{n \to \infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x'') .$$

Valime nüüd punktide jadad $x_i' \in C(F)$, $x_i' \to x$, $x_i' < x$, ja $x_i'' \in C(F)$, $x_i'' \to x$, $x_i'' > x$; siis

$$\lim_{x' \to x} F_X(x') = F_X(x-0) = F_X(x) ;$$

$$\lim_{x'' \to x} F_X(x'') = F_X(x+0) = F_X(x) ,$$

sest ka $x \in C(F)$. Seega saame piiril oma võrratuse äärmiste lülide võrduse, kust järeldub ka võrdus

$$\liminf_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) ,$$

$$\limsup_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) ,$$

millega ongi tõestatud jada $F_{X_n}(x)$ koonduvus punktis x . Et x oli meelevaldne punkt hulgast $C(F)$, järeldub siit jada $F_{X_n}(x)$ nõrk koonduvus.

Täieliku koonduvuse tõestamiseks oleks meil tarvis veel näidata, et kehtivad seosed:

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(-\infty) = F_X(-\infty) , \quad \lim_{n \to \infty} F_{X_n}(\infty) = F_X(\infty) .$$

Et $F_{X_n}(x)$ ja $F_X(x)$ on jaotusfunktsioonid, siis tõepoolest

$$F_{X_n}(\infty) = F_X(\infty) = 1 , \quad F_{X_n}(-\infty) = F_X(-\infty) = 0 ,$$

seega on ka

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(\infty) = 1 , \quad \lim_{n \to \infty} F_{X_n}(-\infty) = 0$$

ning teoreem on tõestatud.

9. Ühine jaotusfunktsioon.

Vaatleme juhuslikku vektorit $\vec{X}=(X_1,\dots,X_n)$ $(\Omega \to R^n)$. Juhuslikku vektorit iseloomustab tema jaotus $P_{\vec{X}}(A)$, $A\subset R^n$, s. o. juhusliku vektori komponentide $X_1,\dots,X_n$ ühine jaotus. Juhusliku vektori jaotuse esituse saame defineerida funktsioonina $F_{\vec{X}}$ $(R^n \to R)$, mida nimetatakse komponentide $X_1,\dots,X_n$ ühiseks jaotusfunktsiooniks.

Jaotusfunktsiooni defineerime jaotusena lahtiste lõpmatute risttahukate klassil:

$$F_{\vec{X}}(x_1,\dots,x_n) = P_{\vec{X}}\big((-\infty,x_1) \times (-\infty,x_2) \times \dots \times(-\infty,x_n)\big) =$$

$$= P\{\omega : X_1(\omega)< x_1,\dots, X_n(\omega)< x_n\}.$$

Näitamiseks, et tegemist on juhuslike suuruste $X_1,\dots$ $\dots,X_n$ ühise jaotusfunktsiooniga, kasutame mõnikord ka kirjutusviisi:

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n).$$

On lihtne näidata, et juhusliku vektori jaotusfunktsioonil on üldiselt samad omadused mis juhusliku suuruse jaotusfunktsioonil, nimelt:

1° $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ on iga oma argumendi suhtes mittekahanev;

2° $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ on iga oma argumendi suhtes vasakult pidev.

3° $\lim\limits_{x_1\to\infty,\dots,x_n\to\infty} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P_{\vec{X}}(R^n) = 1$.

4° $\lim\limits_{x_i\to -\infty} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P_{\vec{X}}\Big(\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(-\infty,x_j)\times \emptyset\Big) = 0,$

s. o. risttahukas, mille üks tahk (i-ndale koordinaadile vastav) on tühihulk, seega on, vastavalt risttahuka mõõdu definitsioonile, sellise risttahuka tõenäosus 0 .

5° $$\lim_{x_{i_1}\to\infty,\dots,x_{i_k}\to\infty} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) =$$

$$= P_{\vec{X}}\Big(\prod_{j=1}^{k} R_{i_j} \prod_{m=1}^{n-k}(-\infty, x_{i'_m})\Big) = P_{\vec{X}}\Big(\prod_{m=1}^{n-k}(-\infty, x'_{i_m})\Big) =$$

$$= P_{X_{i'_1},\dots,X_{i'_{n-k}}}(x_{i'_1},\dots,x_{i'_{n-k}}),$$

nagu järeldub tõenäosusmõõdu kooskõla omadusest. Valides $k = n - 1$, saame ühisest jaotusfunktsioonist tuletada ka vektori komponentide X_i jaotusfunktsioonid:

$$F_{X_i}(x) = F_{X_1,\dots,X_n}(\underbrace{\infty,\dots,\infty}_{i-1}, x, \underbrace{\infty,\dots,\infty}_{i+1,\dots,n}) = P_{\vec{X}}\Big((-\infty,x)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} R_j\Big).$$

Vastavalt definitsioonile saame:

$$P_{\vec{X}}(A) = \int_A dF_{\vec{X}}(\vec{x}),$$

kus integraali tuleb arvutada n-kordsena. Olgu märgitud, et selle seose järgi on isegi risttahukate tõenäosuse arvutamine küllaltki tülikas:

$$P_{\vec{X}}\Big(\prod_{i=1}^{n}[b_i,a_i)\Big) = \int_{\prod_{i=1}^{n}[b_i,a_i)} \dots\dots \int dF_{\vec{X}}(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) =$$

$$= \int_{\prod_{i=1}^{n-1}[b_i,a_i)} \dots \int dF_{\vec{X}}(x_1,\dots,x_{n-1},b_n) - \int_{\prod_{i=1}^{n-1}[b_i,a_i)} \dots \int dF_{\vec{X}}(x_1,\dots,x_{n-1},a_n) =$$

$$= F_{\vec{X}}(b_1,\dots,b_n) - \sum_{i=1}^{n} F_{\vec{X}}(b_1,\dots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\dots,b_n) + \dots$$

$$\ldots + (-1)^k \sum_{(i_1,\ldots,i_{n-k})} F_{\vec{X}}(b_{i_1},\ldots,b_{i_{n-k}},a_{j_1},\ldots,a_{j_k}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n F_{\vec{X}}(a_1,\ldots,a_n) .$$

On ilmne, et iga risttahuka tõenäosus peab olema mittenegatiivne. Selle asjaolu garanteerib tõenäosusmõõdu kooskõla.

Analoogiliselt juhusliku suuruse jaotusfunktsiooniga on ka juhusliku vektori jaotusfunktsiooni võimalik lahutada katkevaks, singulaarseks ja absoluutselt pidevaks komponendiks (üldjuhul sisaldab see kõiki kolme komponenti). Juhul, kui jaotusfunktsioon on (kõigi oma argumentide suhtes) absoluutselt pidev, siis eksisteerib tal tõenäosuse tihedus:

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1,\ldots,\partial x_n} .$$

Sel juhul

$$\int_A dF_{\vec{X}}(\vec{x}) = \int_A f_{\vec{X}}(\vec{x})d\vec{x} = \int \ldots \int_A f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1,\ldots$$
$$\ldots, dx_n .$$

Ilmselt alati

$$\int_{R^n} f_{\vec{X}}(\vec{x})d\vec{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1,\ldots,dx_n = 1 .$$

10. Sõltumatute komponentidega vektori jaotusfunktsioon.

Vaatleme sõltumatute komponentidega vektorit

$$\vec{X} = (X_1,\ldots,X_n) .$$

Et juhusliku vektori $\vec{X}$ jaotus risttahukatel avaldub korrutisena:

$$P_{\vec{X}}(A) = P_{\vec{X}}(\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)) = P(\omega : X_1(\omega)\in [a_1,b_1),\ldots,X_n(\omega)\in$$

$\in [a_n, b_n)) = \prod_{i=1}^{n} P(\omega : X_i(\omega) \in [a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}([a_i, b_i))$,

siis järeldame siit, et võttes vaatluse alla lõpmatud risttahukad

$$\prod_{i=1}^{n} (-\infty, x_i) ,$$

saame

$$F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) .$$

Seega: sõltumatute komponentidega juhusliku vektori jaotusfunktsioon võrdub selle vektori komponentide jaotusfunktsioonide korrutisega.

Diferentseerimisel näeme, et absoluutselt pideva jaotusfunktsiooniga sõltumatute komponentidega juhusliku vektori tõenäosuse tihedus võrdub selle vektori komponentide tõenäosuse tiheduste korrutisega.

$$f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)}{\partial x_1, \dots, \partial x_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{dF_{X_i}(x_i)}{dx_i} = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) .$$

Selletõttu on sõltumatute komponentidega juhusliku vektoriga oluliselt lihtsam opereerida kui sõltuvate komponentidega juhusliku vektoriga ning sellepärast klassikaline tõenäosusteooria käsitlebki eeskätt sõltumatuid juhuslikke suurusi.

11. Juhusliku vektori funktsiooni jaotusfunktsioon.

Olgu meil defineeritud ruum $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ ning juhuslik vektor $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)(\Omega \to R^n)$. Olgu g mingi n muutuja k-dimensionaalne funktsioon $g(x_1, \dots, x_n) = \vec{y} = (y_1, \dots, y_k)$.

Siis juhuslik vektor $\vec{Y} = (Y_1,\dots,Y_k) = g(X_1,\dots,X_n)$ on määratud juhusliku vektoriga $(X_1,\dots,X_n)$; $Y(\Omega \to R^k)$.

Erilist praktilist huvi pakub olukord, kus Y on ühedimensionaalne juhuslik vektor, s. t., juhuslik suurus.

Juhusliku suuruse Y jaotuse saame (vt. ka 2.5) avaldada seosega

$$P_Y(A) = P_{\vec{X}}(g^{-1}(A)) \,, \quad \text{kui} \quad A \in R \,, \quad g^{-1}(A) \in R^n \,.$$

Seega

$$F_Y(x) = P_Y(-\infty,x) = P_{\vec{X}}(g^{-1}(-\infty,x)) \,,$$

aga samuti juhusliku vektori $(Y_1,\dots,Y_k)$ korral

$$F_{\vec{Y}}(x_1,\dots,x_n) = P_{\vec{Y}}(\prod_{i=1}^{k}(-\infty,x_i)) = P_{\vec{X}}(g^{-1}(\prod_{i=1}^{k}(-\infty,x_i)) \,.$$

Kasutades vektori $\vec{X}$ jaotusfunktsiooni, saame viimati saadud seoseid esitada ka kujul:

$$F_Y(x) = \int\limits_{g^{-1}(-\infty,x)} dF_{\vec{X}}$$

ja

$$F_{\vec{Y}}(x_1,\dots,x_k) = \int\limits_{g^{-1}(\prod_{i=1}^{k}(-\infty,x_i))} dF_{\vec{X}} \,,$$

kus integraali vaadeldakse n-dimensionaalsena.

12. Kahe juhusliku suuruse summa jaotusfunktsioon.

Vaatleme nüüd lihtsat erijuhtu: olgu $n = 2$, $k = 1$, $g(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.

Siis $g^{-1}(-\infty,x) = (-\infty,x_1;\ -\infty,x-x_1)$, $-\infty < x_1 < \infty$, kus x_1 võib omandada mistahes väärtused (vt. joonis 67).

Seega

$$F_Y(x) = \int\limits_{g^{-1}(-\infty,x)} dF_{X_1X_2}(x_1,x_2) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{x-x_1} dF_{X_1X_2}(x_1,x_2) .$$

Erijuhul, kui X_1 ja X_2 on sõltumatud, kehtivad seosed

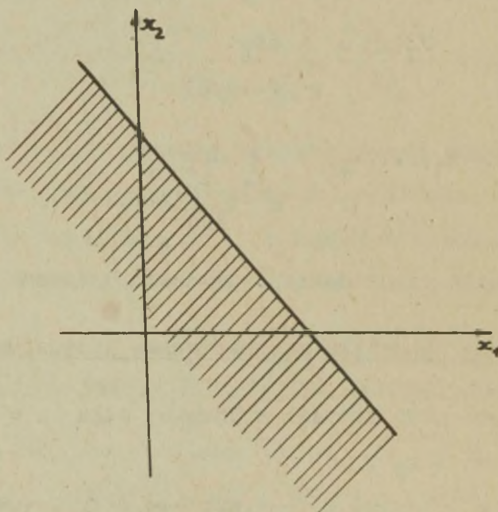
$$F_{X_1X_2}(x_1,x_2) = F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2) ,$$

ja

$$dF_{X_1X_2}(x_1,x_2) = dF_{X_1}(x_1)dF_{X_2}(x_2) .$$

Saame siis

$$F_Y(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{x-x_1} dF_{X_1}(x_1)dF_{X_2}(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{X_2}(x-x_1)dF_{X_1}(x_1) .$$



Joon. 67.

13. Jaotusfunktsioonide konvolutsioon.

Sõltumatute juhuslike suuruste X_1 ja X_2 korral kehtivad, nagu nägime, järgnevad seosed:

Kui

$$Y = X_1 + X_2 ,$$

siis

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_2}(x-x_1)dF_{X_1}(x_1) .$$

Seega on meil defineeritud ühtlasi teatav operatsioon jaotusfunktsioonide klassis: jaotusfunktsioonide paarile F_{X_1} ja F_{X_2} seatakse vastavusse nendega üheselt määratud jaotusfunktsioon F_Y. Sellisel viisil defineeritud operatsiooni nimetatakse jaotusfunktsioonide konvolutsiooniks.

Jaotusfunktsioonide konvolutsiooni operatsiooni tähistatakse sümboliga $*$:

$$F_{X_1} * F_{X_2} = F_Y .$$

Konvolutsioonil on järgnevad omadused:

1° $F_{X_1} * F_{X_2} = F_{X_2} * F_{X_1}$ (kommutatiivsus).

Tõestamiseks märgime, et $X_1 + X_2 = X_2 + X_1$, seega

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1}(x-x_2)dF_{X_2}(x_2) ,$$

niisiis on X_1 ja X_2 osad vahetatud.

Olgu märgitud, et juhul, kui meil on 3 juhuslikku suurust X_1, X_2 ja X_3, kusjuures X_3 on summast $X_1 + X_2$ sõltumatu, saame defineerida ka summa

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 = (X_1 + X_2) + X_3$$

ning siis

$$F_Y = F_{X_1+X_2} * F_{X_3} = (F_{X_1} * F_{X_2}) * F_{X_3}.$$

Kehtib ka konvolutsiooni assotsiatiivsus:

$$2^\circ \quad (F_{X_1} * F_{X_2}) * F_{X_3} = F_{X_1} * (F_{X_2} * F_{X_3}) = F_{X_1} * F_{X_2} * F_{X_3} .$$

Viimane tulemus järeldub juhuslike suuruste summa assotsiatiivsusest.

Saame defineerida ka n juhusliku suuruse $X_1, \ldots, X_n$ jaotusfunktsiooni konvolutsiooni

$$F_{X_1} * F_{X_2} * \ldots * F_{X_n} ,$$

kui vaid iga juhuslik suurus X_k on sõltumatu juhuslikust suurusest $\sum_{i=1}^{k-1} X_i$.

Ilmselt avaldub see konvolutsioon (n-1)-kordse integreerimise tulemusena.

Juhul, kui juhuslikel suurustel X_1 ja X_2 eksisteerivad tõenäosuse tihedused, saame:

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_2}(x-x_1)\, f_{X_1}(x)dx_1 ,$$

ja diferentseerimisel x järgi:

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x-x_1) f_{X_1}(x)dx_1 . \qquad (7)$$

Näeme, et piisab juba sellest, et ühel juhuslikest suurustest X_1 ja X_2 eksisteeriks tõenäosuse tihedus, selleks et $F_Y(x)$ avalduks Lebesgue'i (mitte Stieltjesi) integraali kaudu:

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_2}(x-x_1) f_{X_1}(x)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1}(x-x_2) f_{X_2}(x)dx_2 .$$

14. Simpsoni jaotus.

Näitena vaatleme juhusliku suuruse $Y = X_1 + X_2$ jaotust, kus $X_1 \sim U(a,b)$, $X_2 \sim U(a,b)$, s. t. juhuslikud suurused X_1 ja X_2 on sõltumatud ja ühesuguse jaotusega, milleks on ühtlane jaotus parameetritega a ja b. Siis

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \bar{\in} [a,b], \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \end{cases} \qquad f_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \bar{\in} [a,b], \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Ilmselt peab olema

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2a, \\ 0, & x > 2b. \end{cases}$$

Leiame nüüd $f_Y(x)$ x väärtuste jaoks vahemikus $[2a,2b]$.

Kasutades valemit (7) saame:

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x-x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f_{X_2}(x-x_1) dx_1$$

(siin asendasime $f_{X_1}(x_1)$ tema tähendusega).

Vaatleme nüüd funktsiooni $f_{X_2}(x-x_1)$ väärtusi.

$$f_{X_2}(x-x_2) = \begin{cases} 0, & x-x_1 < a, \text{ s. t. } x_1 > x-a, \\ 0, & x-x_1 > b, \text{ s. t. } x_1 < x-b, \\ \frac{1}{b-a} & \text{ülejäänud } x_1 \text{ väärtuste korral.} \end{cases}$$

Seega

$$\int_a^b f_{X_2}(x-x_1) dx_1 = \int_{\max(a,x-b)}^{\min(x-a,b)} \frac{1}{b-a} dx_1 .$$

Kui $2a \leq x < a+b$, siis $\max(a,x-b) = a$, $\min(x-a,b) = x-a$; kui $a+b \leq x < 2b$, siis $\max(a,x-b) = x-b$, $\min(x-a,b) = b$.

Seega saame

$$f_Y(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^{x-a} dx_1 = \frac{x-2a}{(b-a)^2}\,, \quad \text{kui} \quad 2a \leq x < a+b\,,$$

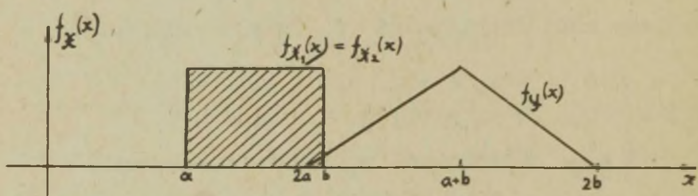
ja

$$f_Y(x) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^2 \int_{x-a}^{b} dx_1 = \frac{2b-x}{(b-a)^2}\,, \quad \text{kui} \quad a+b \leq x < 2b\,.$$

Kokkuvõttes saame juhusliku suuruse Y tõenäosuse tihedusele avaldise:

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 2a\,, \\ \dfrac{x-2a}{(b-a)^2}\,, & 2a \leq x < a+b\,, \\ \dfrac{2b-x}{(b-a)^2}\,, & a+b \leq x < 2b\,, \\ 0\,, & x \geq 2b\,. \end{cases}$$

Seega on lihtne näha, et saime uue jaotuse, mida nimetatakse Simpsoni jaotuseks. Simpsoni jaotuse tõenäosuse tihedust esitab graafiliselt joonis 68.



Joon. 68.

15. Ülesandeid.

1. Kas oleks võimalik defineerida jaotusfunktsioon ka paremalt pidevana, säilitades tema kõik muud omadused endisena? Kuidas näeks sel juhul välja definitsioon?

2. Missuguste omadustega funktsioon on

$$P(X \geqslant x) \ ?$$

$$P(X > x) \ ?$$

3. Milline on pidevuse ja diferentseeruvuse vahekord klassikalises analüüsis? Kas tuletise olemasolu on piisav diferentseeruvuseks?

Võrrelda seda tulemust Radon-Nikodymi teoreemi väitega.

4. Tõestada järgmised tõenäosuse tiheduse omadused:

a) $f_X(x) \geqslant 0$;

b) $P_X[a,b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$.

Mis on teise omaduse tähenduseks? Teha joonis, mis illustreeriks omadust b).

5. Olgu $X(\omega)$ nullpunkti suhtes sümmeetriline juhuslik suurus ja olgu $F_X(x)$ rangelt monotoonne. Missuguse seose kvantiilide x_p ja x_{1-p} vahel saame siis?

Missuguse seose kvantiilide vahel saame juhul, kui $X(\omega)$ on punkti a suhtes sümmeetriline juhuslik suurus, kusjuures $F_X(x)$ on rangelt monotoonne?

6. Milleks on kvantiili definitsioonis tarvis nõuda juhusliku suuruse X jaotusfunktsiooni ranget monotoonsust?

7. Kas diskreetsel juhuslikul suurusel eksisteerivad kvantiilid? Kas oleks neid mingil viisil võimalik mõistlikult defineerida?

8. Kas juhuslike suuruste jada koonduvusest peaaegu kindlasti saab teha mingit järeldust vastavate jaotusfunktsioonide koonduvuse kohta?

9. Leida kahe juhusliku suuruse vahe jaotusfunktsioon.

10. Olgu ühtlase jaotusega juhuslikud suurused $X_i \sim U(0,1)$ $(i=1,2,\dots,n)$ täielikult sõltumatud. Leida $\max X_i$ jaotusfunktsioon ja tõenäosuse tihedus. Leida $\min\limits_i X_i$ jaotusfunktsioon ja tõenäosuse tihedus.

§ 4. M o m e n d i d .

1. Juhusliku suuruse keskväärtus.

Juhusliku suuruse X iseloomustamiseks kasutatakse sageli selle juhusliku suuruse keskväärtust (ka ooteväärtus) EX, mis defineeritakse juhusliku suuruse X integraalina üle kogu ruumi, kui see eksisteerib:

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) . \qquad (1)$$

Erijuhul, liht- ja elementaarfunktsiooni korral langeb keskväärtuse definitsioon ühte elementaarsest tõenäosusteooriast tuttava keskväärtuse definitsiooniga:

$$EX = \sum_{j=1}^{n} x_j P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j P_X(x_j) ; \qquad (2)$$

$$EX = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P_X(x_j) , \qquad (3)$$

kus

$$X(\omega) = \sum_j x_j I_{A_j}(\omega) ,$$

$$A_j \cap A_i = \emptyset \ (i \neq j),$$
$$\bigcup A_j = \Omega.$$

Vaadeldava integraali (1) saame esitada ka integraalina juhusliku suuruse väärtuste ruumis Ω :

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} xP_X(dx). \qquad (4)$$

Tõepoolest, moodustame integraali (1) defineeriva lihtfunktsioonide integraalide jada. Aga sellise integraali võib esitada ka kujul, mis on antud avaldises (2) kõige paremal; selliste summade jada piirväärtuseks on aga integraal, mis asub seoses (4) kõige paremal.

Tuleb märkida, et lõplik keskväärtus eksisteerib vaid juhul, kui vaadeldav juhuslik suurus X on integreeruv; võib esineda veel olukord, et juhuslikul suurusel on lõpmatu keskväärtus $EX = \infty$ või $EX = -\infty$, aga samuti võib ka keskväärtus hoopiski mitte eksisteerida (juhul, kui ei eksisteeri vastavat integraali), eriti, kui summa (3) ei ole absoluutselt koonduv, kuigi võib koonduda tingimisi.

2. Keskväärtuse omadusi.

Keskväärtuse omaduste tuletamiseks saame kasutada meile juba tuntud integraali omadusi. Siinjuures peame silmas, et keskväärtus ei ole juhuslik suurus, vaid on konstant.

1° $Ec = c$, kus c on konstant.

Tõepoolest: $Ec = \int_{\Omega} cP(d\omega) = c\int_{\Omega} P(d\omega) = c$.

Erijuhul: $E(EX) = EX$.

2° $E(X+Y) = EX + EY$ (tuleneb integraali distributiivsusest e. aditiivsusest).

3° $E(cX) = cEX$ (tuleneb integraali homogeensusest).

4° Kui $X \geqslant 0$, siis $EX \geqslant 0$ (tuleneb integraali monotoonsusest).

5° Kui X ja Y on sõltumatud, siis

$$E(XY) = EX \cdot EY .$$

<u>Omaduse 5° tõestus</u>:

Kasutame juhusliku suuruse XY jaoks keskväärtuse definitsiooni, rakendades selleks valemit (4). Siin tuleb jaotuseks võtta (X,Y) ühine jaotus P_{XY}, mis realiseerub ilmselt kahedimensionaalses ruumis R^2; seetõttu tuleb ka integraali mõista kahedimensionaalsena, samuti ruumielemendi diferentsiaali $dz = dx \cdot dy$

$$E(XY) = \iint xyP_{XY}(dz) .$$

Et aga sõltumatute juhuslike suuruste jaotus avaldub jaotuste korrutisena:

$$P_{XY}(A_1 \times A_2) = P_X(A_1)P_Y(A_2) ,$$

saame

$$E(XY) = \iint xyP_X(dx)P_Y(dy) = \int xP_X(dx)\int yP_Y(dy) = EX\,EY,$$

mida oligi tarvis tõestada.

3. <u>Keskväärtuse avaldamine jaotusfunktsiooni järgi</u>.

Keskväärtuse võime avaldada ka Lebesgue-Stieltjesi integraalina, kasutades integreerimist jaotusfunktsiooni järgi (viimane on teatavasti tõkestatud variatsiooniga, seega vastav integraal eksisteerib alati). Et jaotusfunktsiooni definitsiooni kohaselt

$$dF_X(x) = F_X(x+dx) - F_X(x) = P_X(x,x+dx) = P_X(dx) ,$$

siis saame seose (4) esitada ühtlasi kujul:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) . \qquad (5)$$

Juhul, kui juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon on absoluutselt pidev, seega eksisteerib tõenäosuse tihedus $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$, saame seosele (5) anda kuju:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx , \qquad (6)$$

mis on sobiv keskväärtuse arvutamiseks alati, kui tõenäosuse tihedus $f_X(x)$ eksisteerib. (Vt. näiteks I, 7.6-7.9).

4. Juhusliku suuruse funktsiooni keskväärtus.

Olgu X mingi juhuslik suurus, $X(\Omega \to R)$ ning g suvaline mõõtuv funktsioon $g(R \to R)$. Siis on ka $g(X)$ juhuslik suurus. Vaatleme, kuidas avaldub juhusliku suuruse $g(X)$ keskväärtus.

Teoreem 1. Juhusliku suuruse X mõõtuva funktsiooni $g(X)$ keskväärtus avaldub juhusliku suuruse X jaotuse kaudu järgnevalt:

$$Eg(X) = \int_{\Omega} g(X)P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)P_X(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_X(x) . \qquad (7)$$

Tõestus.

a) Vaatleme erijuhtu, kus X on indikaatorfunktsioon I_A. Tema jaotus avaldub siis järgnevalt:

$$\begin{cases} P_X(1) = P(A) = p, \\ P_X(0) = 1 - p . \end{cases}$$

Juhusliku suuruse $g(X)$ jaotuse leiame siis samuti:

$$\begin{cases} P_{g(X)}(g(1)) = p , \\ P_{g(X)}(g(0)) = 1-p , \end{cases}$$

sest $g(X)$ saab samuti omandada ainult kaks erinevat väärtust: $g(0)$ ja $g(1)$, mille esinemise tõenäosused on vastavalt $1-p$ ja p; et $g(X)$ on mõõtuv, siis on ta ka lihtfunktsioon. Kontrollime nüüd seose (7) keskmist võrdust:

$$\int_{\Omega} g(X)P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)P_X(dx) . \tag{8}$$

Ühelt poolt lihtfunktsiooni integraali definitsiooni kohaselt

$$\int_{\Omega} g(X)P(d\omega) = g(1)p + g(0)(1-p) .$$

Teiselt poolt, kasutades võrduse (8) paremat poolt, leiame

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\,(x)P_X(dx) = g(0)(1-p)+g(1)p .$$

Järelikult kontrollitud võrdus kehtib. Punktis 2 toodud aruteluga analoogiline mõttekäik näitab ka parempoolse võrduse kehtimist; vasakpoolne võrdus järeldub aga vahetult definitsioonist.

b) Olgu X lihtfunktsioon.

Saame rakendada punktis a) tooduga sarnast mõttekäiku, kus tuleb vaid juhusliku suuruse X kahe erineva väärtuse 0 ja 1 asemel vaadelda juhusliku suuruse X n erinevat väärtust $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $g(X)$ osutub ka sel juhul (ülimalt) n väärtusega lihtfunktsiooniks.

c) Edasi saame teoreemi tõestada juhul, kui X on mittenegatiivne mõõtuv funktsioon; saame leida mittenegatiivsete lihtfunktsioonide mittekahaneva jada $X_n \to X$ ning arvutades nende integraalid näeme, et (punkti b) põhjal) kehtib kogu aeg võrdus (7), mis jääb püsima (integraali 9° omaduse põhjal, vt. II,4.5) ka piiril $X_n \to X$.

d) Suvalise mõõtuva funktsiooni jaoks on vaadeldav teoreem tõestatav, kasutades funktsiooni esitust tema positiivse ja negatiivse osa kaudu. Teoreem on seega täielikult tõestatud. Sellel teoreemil on suur tähtsus mitmesugustes keskväärtuste rakendustes.

5. Juhusliku suuruse momendid.

Moodustame juhusliku suuruse X astmed X^r $(r \geqslant 0)$. Kuna astendamine on mõõtuv funktsioon, on ka kõik juhusliku suuruse astmed juhuslikud suurused.

Nimetame suurust

$$m_r = EX^r ,$$

s. o. juhusliku suuruse X r-nda astme keskväärtust selle juhusliku suuruse r-ndaks momendiks.

Ilmselt võib EX^r kas eksisteerida või ka mitte eksisteerida, olla lõplik või lõpmatu (sõltuvalt X jaotusest ning r arvulisest väärtusest). Kasutades teoreemi 1 ning seoseid (1) - (6), saame momentide arvutamiseks järgnevad valemid:

$$EX^r = \int_{\Omega} X^r(\omega) P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r P_X(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r dF_X(x) ,$$

mille lihtsamad erijuhud on järgmised:

$$EX^r = \sum_{i=1}^{n} x_i \; P_X(x_i) ;$$

$$EX^r = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r \; P_X(x_i) ;$$

$$EX^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\, dx .$$

Juhusliku suuruse absoluutseks r-järku momendiks $|m|_r$ nimetatakse juhusliku suuruse absoluutväärtuse r-nda astme keskväärtust:

$$|m|_r = E|X|^r = \int_{\Omega} |X|^r P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r P_X(dx) .$$

(Millised lihtsamad erijuhud tulenevad viimasest valemist?)

On lihtne näha, et juhusliku suuruse r-järku absoluutne moment eksisteerib iga r korral, sest funktsioonil $|X|^r$ on negatiivne osa võrdne nulliga, seega ka $I^- = 0$ ning $I = I^+$ (vt. II, 4.3). Ilmselt aga ei tarvitse see absoluutne moment alati lõplik olla.

Momentide ning absoluutsete momentide eksisteerimise ja lõplikkuse kohta tõestame mõningad teoreemid.

<u>Teoreem 2.</u> Kui juhuslikul suurusel X eksisteerib mingi lõplik k-järku moment, siis on ka tema k-järku absoluutne moment lõplik.

<u>Tõestus.</u> Vaatleme suvalist juhuslikku suurust $X = X^+ - X^-$. Siis

$$X^r = (X^+ - X^-)^r = (X^r)^+ - (X^r)^- . \tag{9}$$

Samal ajal $|X| = X^+ + X^-$, ja

$$|X|^r = (X^+ + X^-)^r . \tag{10}$$

Kuna binoomide (9) ja (10) arendistes (juhul, kui r ei ole täisarv, on nendeks lõpmatud read), on samad liikmed, üksnes erinevate märkidega, kehtib ilmselt ka seos:

$$|X|^r = (X^r)^+ + (X^r)^- .$$

Tähistame $\int_{\Omega} (X^r)^+ P(d\omega) = I^+$, $\int_{\Omega} (X^r)^- P(d\omega) = I^-$.

Siis

$$m_r = EX^r = I^+ - I^- , \quad |m|_r = E|X|^r = I^+ + I^- ,$$

ning meie teoreem ongi tõestatud, sest EX^r lõplikkuseks on tarvis, et $I^+ < \infty$, $I^- < \infty$, seega ka $I^+ + I^- < \infty$.

<u>Järeldus 1</u>. Kui juhuslikul suurusel X on k-järku absoluutne moment lõplik, siis eksisteerib tal ka k-järku moment.

<u>Teoreem 3</u>. Kui juhuslikul suurusel X eksisteerib mingi lõplik k-järku absoluutne moment, siis eksisteerib tal ka lõplik r-järku absoluutne moment iga r, $0 \leq r < k$ korral.

<u>Tõestus.</u> Lähtume ilmsest võrratusest

$$|X|^r \leq |X|^k + 1 .$$

Tõepoolest, juhul, kui $|X| \leq 1$, on ka $|X|^r \leq 1$, ammugi siis $|X|^r \leq |X|^k + 1$.

Kui aga $|X| > 1$, siis alati, kui $r < k$, on $|X|^r < |X|^k$, ammugi siis $|X|^r \leq |X|^k + 1$.

Kasutades integraali aditiivsust ja monotoonsust saame:

$$E|X|^r = \int_\Omega |X|^r P(d\omega) \leq \int_\Omega |X|^k P(d\omega) + \int_\Omega P(d\omega) = E|X|^k + 1 ,$$

seega järeldub absoluutse momendi $|m|_k$ lõplikkusest ka absoluutse momendi $|m|_r$ lõplikkus. Teoreem on tõestatud.

<u>Järeldus 2</u>. Kui juhusliku suuruse k-järku moment või absoluutne moment eksisteerib ja on lõplik, siis eksisteerivad tal ka kõik r-järku momendid $(0 \leq r \leq k)$ ning need on lõplikud.

6. <u>Tsentraalsed momendid</u>.

Mõnikord pakub huvi juhuslikule suurusele X vastava <u>nihutatud</u> juhusliku suuruse $Y = X-a$ uurimine. Nihutatud juhusliku suuruse Y jaotus avaldub X jaotuse kaudu järgmiselt:

$$P_Y([c,d)) = P_X([c-a,\ d-a)) \quad (-\infty < c \leq d < \infty)\ .$$

Juhusliku suuruse Y momente ja absoluutseid momente

$$EY^r = E(X-a)^r\ ;$$

$$E|Y|^r = E|X-a|^r$$

nimetatakse juhusliku suuruse X vastavateks momentideks punkti a suhtes.

Sagedamini vaadeldakse juhusliku suuruse X keskväärtuse EX võrra nihutatud juhuslikku suurust

$$\bar{X} = X - EX\ .$$

Sellist juhuslikku suurust $\bar{X}$ nimetatakse juhuslikule suurusele X vastavaks <u>tsentreeritud</u> juhuslikuks suuruseks.

Tsentreeritud juhusliku suuruse $\bar{X}$ momente nimetatakse juhusliku suuruse tsentraalseteks momentideks $\bar{m}_r$.

$$\bar{m}_r = E(X-EX)^r = E\bar{X}^r\ .$$

Samuti võib vaadelda ka juhusliku suuruse X tsentraalseid absoluutseid momente $|\bar{m}|_r$:

$$|\bar{m}|_r = E|X-EX|^r = E|\bar{X}|^r\ .$$

Defineerides kõige üldisema mõistena momendi mingi punkti a suhtes, saame erijuhuna ka punktis 5 defineeritud momendid, võttes a = 0 ; seetõttu nimetataksegi momente (punktis 5 toodud definitsiooni mõttes) vahel <u>algmomentideks</u>, s. o. momentideks nullpunkti suhtes.

7. Täisarvuliste järkudega momendid.

Rakendustes suurima tähtsusega on täisarvuliste järkudega momendid. Neist esimene on null-järku moment m_0. On lihtne näha, et iga juhusliku suuruse X korral null-järku moment (samuti ka absoluutne ja tsentraalne null-järku moment) eksisteerib ja on võrdne ühega (tõestada). Ühtlasi on see ainus moment, mis igal juhuslikul suurusel kindlasti eksisteerib.

Esimest järku algmoment on juhusliku suuruse X keskväärtus $m_1 = EX$.

Esimest järku tsentraalne moment võrdub iga juhusliku suuruse korral, millel eksisteerib keskväärtus EX, nulliga: $\bar{m}_1 = 0$.

Teist järku moment m_2 on alati, kui ta eksisteerib, positiivne (miks?) ja alati suurem teist järku tsentraalsest momendist või sellega võrdne (miks?).

Teist järku tsentraalne moment $\bar{m}_2$, mida nimetatakse ka dispersiooniks ja tähistatakse sümboliga DX, on üks juhusliku suuruse olulisemaid arvulisi karakteristikuid, millega edaspidi detailsemalt tutvume. Dispersioon iseloomustab juhusliku suuruse hajuvust (tema keskväärtuse ümber) ning on alati mittenegatiivne (miks?), kui ta eksisteerib.

Kõik paaritut järku tsentraalsed momendid $\bar{m}_{2k+1}$ (kui nad eksisteerivad), on sümmeetriliste jaotuste korral võrdsed nulliga (miks?). Seetõttu ongi nende abil võimalik iseloomustada jaotuse sümmeetrilisust (kui $k > 0$ - miks?).

Kolmandat järku tsentraalse momendi ja $(DX)^{3/2}$ suhet $\frac{\bar{m}_3}{(\bar{m}_2)^{3/2}}$ nimetataksegi asümmeetria kordajaks. (Mida näitab asümmeetria kordaja positiivne või vastavalt negatiivne väärtus?)

Juhusliku suuruse neljandat järku tsentraalset momenti kasutatakse juhusliku suuruse võrdlemiseks normaaljaotusega. Suurust $\frac{\bar{m}_4}{\bar{m}_2^2} - 3$ nimetatakse juhusliku suuruse ekstsessiks.

On lihtne näha, et iga täisarvulist järku algmomendi eksisteerimisest järeldub ka sama järku tsentraalse momendi eksisteerimine ning vastupidi (ja koos nendega kõigi madalamat järku vastavate momentide eksisteerimine). Võttes arvesse, et

$$\bar{m}_r = E(X-EX)^r = E(\sum_{i=0}^{r} C_r^i X^i (EX)^{r-i}(-1)^{r-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} C_r^i (EX)^{r-i} EX^i (-1)^{r-i} = \sum_{i=0}^{r} C_r^i m_1^{r-i} m_i (-1)^{r-i} =$$

$$= (-1)^r (m_1^r - r.m_1^{r-1}.m_1) + \sum_{i=2}^{r} C_r^i m_1^{r-i} m_i (-1)^{r-i} ,$$

saame kokkuvõttes lihtsad seosed

$$\bar{m}_r = (-1)^{r-1}(r-1)m_1^r + \sum_{i=2}^{r} C_r^i (-1)^{r-i} m_1^{r-i} m_i , \qquad (11)$$

mis võimaldavad suvalise täisarvulise järguga tsentraalset momenti väljendada sama ning madalamat järku algmomentide kaudu (ja ka vastupidi - tõestada!).

8. Dispersioon.

Juhusliku suuruse iseloomustamisel on olulise tähtsusega tema hajuvus keskväärtuse ümber. Seda iseloomustab hästi teine tsentraalne moment, mis (tänu oma mõningatele headele matemaatilistele omadustele) on valitud üldiselt juhusliku suuruse hajuvuse karakteristikuks. Olgu siiski märgitud, et dispersiooni kõrval kasutatakse ka teisi hajuvuse karakteristikuid (näiteks kvantiilide teatavaid funktsioone), seda enam, et dispersioon ei tarvitse igal juhuslikul suurusel eksisteeridagi.

Niisiis, dispersiooniks nimetatakse suurust

$$DX = E(X-EX)^2 = \bar{m}_2 .$$

Valemist (11) järeldub, et dispersioon avaldub momentide kaudu:

$$DX = m_2 - m_1^2 .$$

Dispersioonil on järgmised olulised omadused:

1° $Dc = 0$ (tõestada!);

2° $D(X+c) = DX$ (tõestada!);

3° $D(cX) = c^2 DX$ (tõestada!);

4° $D(X \pm Y) = DX + DY$, kui X ja Y on sõltumatud (tõestada, kasutades keskväärtuse 5° omadust!).

Sageli kasutatakse hajuvuse näitajana ka ruutjuurt dispersioonist, mida nimetatakse <u>standardhälbeks</u> $\sigma = \sqrt{DX}$.

Paralleelselt juhusliku suurusega X on sageli otstarbekas vaadelda juhuslikku suurust $\tilde{X} = \frac{X}{\sqrt{DX}}$, mida nimetatakse juhuslikule suurusele X vastavaks <u>normeeritud</u> suuruseks.

On lihtne näha, et iga normeeritud juhusliku suuruse dispersioon on 1: $D\tilde{X} = 1$ (tõestada!).

Tsentreeritud ja normeeritud juhuslikku suurust $\frac{X-EX}{\sqrt{DX}} = \tilde{\bar{X}}$ nimetatakse ka normaliseeritud juhuslikuks suuruseks.

(Millega võrdub normaliseeritud juhusliku suuruse keskväärtus? dispersioon? null- ja esimest järku tsentraalne moment? Kuidas avaldub asümmeetria ja ekstsess?).

9. Segamomendid.

Olgu $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ n-dimensionaalne juhuslik vektor. Selle vektori iga komponendi jaoks saame arvutada momendid, kuid need ei anna küllaldaselt informatsiooni vektori kui terviku kohta, sest nad ei iseloomusta vektori komponentide omavahelisi seoseid. Täielikumat informatsiooni juhusliku vektori kohta annavad segamomendid. Nimetame vektori $\vec{X}$ k-järku segamomendiks suurust

$$E(X_1^{i_1} \cdot X_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n}), \quad \text{kus} \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = k, \; i_j \geq 0.$$

Kui $k > 0$, siis eksisteerib erinevaid k-järku segamomente lõpmata palju; piirdudes täisarvuliste indeksitega i_j ja k saame lõpliku hulga erinevaid juhusliku vektori $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ segamomente. (Kui palju neid on?)

Erijuhul, lugedes $i_j = 0$, $j \neq l$, $i_l = k$, saame segamomendi valemist leida ka vektori l-nda koordinaadi k-nda momendi EX_l^k.

Suurimat huvi segamomentide seas pakub teist järku segamomentide vaatlemine. Kahe tsentreeritud juhusliku suuruse

X ja Y teist järku segamomenti

$$E(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}) = E((X-EX)(Y-EY))$$

nimetatakse nende juhuslike suuruste kovariatsiooniks.

Juhusliku vektori $\vec{X}=(X_1,\dots,X_n)$ kõigi komponendipaaride kovariatsioonide hulk esitatakse tavaliselt kovariatsioonimaatriksina ning tähistatakse $\operatorname{cov} X$. Lugedes vektorit $\vec{X}$ (nagu see on tavaks) üheveeruliseks maatriksiks, saame kovariatsioonimaatriksi leida valemist

$$\operatorname{cov} X = E((X-EX)(X-EX)'), \qquad (12)$$

üksikasjalikumalt:

$$\operatorname{cov} X = \begin{pmatrix} E(X_1-EX_1)^2 & E((X_1-EX_1)(X_2-EX_2)) & \dots E((X_1-EX_1)(X_n-EX_n)) \\ E((X_2-EX_2)(X_1-EX_1)) & E(X_2-EX_2)^2 & \dots E((X_2-EX_2)(X_n-EX_n)) \\ \dots & \dots & \dots \\ E((X_n-EX_n)(X_1-EX_1)) & E((X_n-EX_n)(X_2-EX_2)) & \dots E(X_n-EX_n)^2 \end{pmatrix},$$

s. o. maatriks, mille i-nda rea ja j-nda veeru elemendiks on X_i ja X_j kovariatsioon $E((X_i-EX_i)(X_j-EX_j))$.

Näeme, et kovariatsioonimaatriks on sümmeetriline, sest $E((X_i-EX_i)(X_j-EX_j)) = E((X_j-EX_j)(X_i-EX_i))$; kovariatsioonimaatriksi peadiagonaalil paiknevad juhusliku vektori komponentide dispersioonid DX_i.

Kovariatsioonide praktilisel arvutamisel on otstarbekas kasutada valemit

$$E((\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}) = E(XY) - E(X)E(Y). \qquad (13)$$

(Tõestada see valem!)

Valemist (12) ja keskväärtuse 5° omadusest järeldub ühtlasi, et kui juhuslikud suurused X ja Y on sõltumatud, siis on nende kovariatsioon 0. (Tõestada!)

10. Korrelatsioonimaatriks.

Vaatleme normaliseeritud juhuslikke suurusi $\tilde{X}$ ja $\tilde{Y}$. Nende kovariatsioon avaldub suuruste X ja Y kaudu järgnevalt:

$$E(\tilde{X}\tilde{Y}) = \frac{E((X-EX)(Y-EY))}{\sqrt{DX\,DY}}. \qquad (14)$$

Seosega (14) määratud avaldist nimetatakse juhuslike suuruste X ja Y korrelatsioonikordajaks. (Et korrelatsioonikordajaid tuntakse matemaatilises statistikas veel teisigi, siis nimetatakse valemiga (14) väljendatud suurust täpsemalt <u>lineaarse korrelatsiooni kordajaks</u>; selle nimetuse sisulises põhjendatuses veendume varsti).

Tähistame juhusliku vektori $\bar{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ i-nda ja j-nda komponendi korrelatsioonikordaja sümboliga r_{ij}. Siis

$$r_{ij} = \frac{E((X_i-EX_i)(X_j-EX_j))}{\sqrt{DX_i\,DX_j}}.$$

Samuti kui juhusliku vektori komponentide kovariatsioonid, moodustavad ka juhusliku vektori komponentide korrelatsioonikordajad maatriksi, mida nimetatakse korrelatsioonimaatriksiks ja tähistatakse tähega R. Korrelatsioonimaatriksi elementideks on r_{ij}; korrelatsioonimaatriksi saame kovariatsioonimaatriksist, korrutades selle iga i-ndat rida teguriga $\frac{1}{\sqrt{DX_i}}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ja iga j-ndat veergu teguriga $\frac{1}{\sqrt{DX_j}}$ $(j=1,2,\ldots,n)$. (Tõestada!)

Seega kokkuvõttes

$$R = \frac{1}{\sqrt{DX}}\,\mathrm{cov}\,X\,\frac{1}{\sqrt{DX}},$$

kus $\frac{1}{\sqrt{DX}}$ on diagonaalmaatriks, mille diagonaalelementideks d_i on juhuslike suuruste X_i standardhälbe pöördväärtused $\frac{1}{\sqrt{DX_i}}$ $(i=1,\ldots,n)$.

Paneme tähele, et korrelatsioonimaatriksi diagonaalelemendid võrduvad ühega (tõestada!) ning maatriks on ise sümmeetriline (miks?).

11. Korrelatsioonikordaja.

Vaatleme nüüd korrelatsioonikordajate omadusi.

1° $$r_{ij} = \frac{E(X_iX_j)-(EX_iEX_j)}{\sqrt{DX_i\,DX_j}}.$$

Seos on kasulik korrelatsioonikordaja praktilisel leidmisel.

2° Kui X_i ja X_j on sõltumatud, siis $r_{ij} = 0$. (Tõestada!)

3° Kui $Y_i = X_i + a$ ja $Y_j = X_j + b$ ning r'_{ij} on Y_i ja Y_j korrelatsioonikordaja, siis $r'_{ij} = r_{ij}$. (Tõestada, kasutades korrelatsioonikordaja definitsiooni, keskväärtuse omadusi ja dispersiooni omadust 2°).

4° Kui $X_j = aX_i + b$, siis $r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } a > 0 \\ -1, & \text{kui } a < 0 \end{cases}$.

Tõestada (analoogiliselt omadusele 3°). Siit (ja järgmisest omadusest) ilmnebki, miks sobib ülalvaadeldavat korrelatsioonikordajat nimetada just lineaarse korrelatsiooni kordajaks.

5° $|r_{ij}| \leq 1$.

Selle omaduse tõestamiseks on meil tarvis tõestada üks oluline võrratus, mis seob 2-dimensionaalse juhusliku vektori teist järku momente ning on üldistuseks vastavatele analüüsis tuntud võrratustele.

Cauchy-Bunjakovski (Schwartzi) võrratus.

$$(EXY)^2 \leq EX^2EY^2 . \tag{15}$$

Vaatleme juhuslikku suurust

$$Z = X + \lambda Y .$$

Kuna iga λ korral $E(X+\lambda Y)^2 \geq 0$, siis ka

$$EX^2 + 2\lambda EXY + \lambda^2 EY^2 \geq 0 .$$

Vasakul olev ruutvorm λ suhtes peab olema mittenegatiivselt määratud, diskriminandi kaudu on see avaldatav nõudena:

$$4(EXY)^2 - 4EX^2EY^2 \leq 0 ,$$

millest järeldubki seos (15).

Tõestame nüüd korrelatsioonikordaja 5^0 omaduse. Selleks valime

$$X = X_i - EX_i ; \; Y = X_j - EX_j .$$

Kuna $EX^2EY^2 > 0$, siis saame võrratusest (14)

$$\frac{(EXY)^2}{EX^2EY^2} \leq 1 ; \quad \left| \frac{EXY}{\sqrt{EX^2}\,\sqrt{EY^2}} \right| \leq 1$$

ja seega

$$|r_{ij}| = \left| \frac{E\big((X_i-EX_i)(X_j-EX_j)\big)}{\sqrt{E(X_i-EX_i)^2}\,\sqrt{E(X_j-EX_j)^2}} \right| \leq 1 ,$$ mida oligi tarvis tõestada.

Seega näeme, et korrelatsioonikordaja saavutab maksimaalse väärtuse parajasti siis, kui X_j avaldub X_i lineaarse funktsioonina. (Kas ka siis, kui X_i avaldub X_j lineaarse funktsioonina?)

Näiteid juhuslike suuruste arvuliste karakteristikute leidmise kohta vt. peatükk I, paragrahvid 6 ja 7. Siia lisame vaid mõne täiendava näite.

Näide 1. $X \sim B(n,p)$; vt. ka I, 7.2.

Vahetult jaotust kasutades saaksime leida:

$$EX = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, p^i\, q^{n-i} \cdot i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot i \cdot p^i \cdot q^{n-i} =$$

$$= np \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-i+1)!}\, p^{i-1} \cdot q^{n-1-i+1} =$$

$$= np \sum_{i=0}^{n'} C_{n'}^i\, p^i\, q^{n'-i} = np\,, \quad \text{kus } n' = n-1, \text{ ja } i-1 - i.$$

Sarnaselt on võimalik leida ka EX^2 (arvutada!) ja seejärel DX.

Näide 2. X on n-dimensionaalne normaaljaotusega juhuslik suurus, $X \sim N(\vec{m}, \Sigma)$. Siis

$$f_X(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{|\Sigma|}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-m)'\Sigma^{-1}(x-m)},$$

kus $m = EX$, $\Sigma = \operatorname{cov} X$.

Leiame siit erijuhuna 2-dimensionaalse normaaljaotuse avaldise. Siis

$$\operatorname{cov} X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad \text{kus } X = (X_1, X_2),$$

$D(X_1) = \sigma_1^2$, $D(X_2) = \sigma_2^2 = \ _2^2$ ja ρ on X_1 ja X_2 korrelatsioonikordaja. Siis $|\Sigma| = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$; $\sqrt{|\Sigma|} = $
$= \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$;

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}.$$

Leiame veel

$$(x-m)'\Sigma^{-1} = (x_1-m_1, x_2-m_2) \cdot \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1^2} - \rho\frac{x_2-m_2}{\sigma_1\sigma_2}, \frac{x_2-m_2}{\sigma_2^2} - \rho\frac{x_1-m_1}{\sigma_1\sigma_2} \right).$$

Edasi

$$(X-m)'\Sigma^{-1}(x-m) =$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right),$$

seega

$$f_X(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

Näeme, et 2-dimensionaalse normaaljaotuse määramiseks üldjuhul on tarvis teada viit arvulist parameetrit: keskväärtusi m_1 ja m_2, dispersioone σ_1^2 ja σ_2^2 ning korrelatsioonikordajat ρ.

Üldiselt määrab n-dimensionaalse normaaljaotuse $n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ parameetrit.

12. Ülesandeid.

1. Vaatleme juhuslikku suurust X, millel eksisteerib tõenäosuse tihedus $f_X(x)$. Asendame selle mõttes materiaalsete punktide süsteemiga (varvaga), kusjuures tähistagu $f_X(x)$ varva tihedust punktis x. Missugune tähendus oleks momentidel sellises interpretatsioonis?

2. Leida Simpsoni jaotuse keskväärtus ja dispersioon.

3. Leida Cauchy jaotuse dispersioon.

4. Üldistatud Poissoni jaotus $P(\lambda, a, b)$ on defineeritud seosega:

$$P(ak+b) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} .$$

Leida üldistatud Poissoni jaotusega juhusliku suuruse keskväärtus ja dispersioon.

5. Milline seos on m_k ja $|m|_k$ vahel. Miks?

6. Tõestada, et juhusliku suuruse dispersioon võrdub nulliga parajasti siis, kui juhuslik suurus on peaaegu kindlasti võrdne konstandiga.

7. Tõestada väide: Kui X ja Y on normaaljaotusega ning nende korrelatsioonikordaja on 0, siis on nad sõltumatud. (Näpunäide: kasutada näites 2 esitatud kuju.)

K i r j a n d u s .

Põhiline:

1. Гнеденко В.В. Курс теории вероятностей. Москва, 1965.
2. Лоэв, М. Теория вероятностей. Москва, 1962.

Täiendav:

3. Renyi, A. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, 1962.
4. Гихман И.И. Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Москва, 1965.
5. Халмош П. Теория меры. Москва, 1953.
6. Kull, I. Reaalmuutuja funktsioonide teooria. Tartu, 1963.
7. Kangro, G. Matemaatiline analüüs I. Tallinn, 1965.

Ülesannete kogud:

8. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под редакцией А.А. Свешникова. Москва, 1965.
9. Мешалкин, Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. Москва, 1963.

Tabel 1.

Naturaalarvude faktoriaalid ja nende kümnendlogaritmid.

n	$n!$	$\log n!$	n	$n!$	$\log n!$
1	1	0,00000000	26	$40329146 \cdot 10^{19}$	26,60561903
2	2	0,30103000	27	$10888869 \cdot 10^{21}$	28,03698279
3	6	0,77815125	28	$30488834 \cdot 10^{22}$	29,48414082
4	24	1,38021124	29	$88417620 \cdot 10^{23}$	30,94653882
5	120	2,07918125	30	$26525286 \cdot 10^{25}$	32,42366007
6	720	2,85733250	31	$82228387 \cdot 10^{26}$	33,91502177
7	5040	3,70243054	32	$26313084 \cdot 10^{28}$	35,42017175
8	40320	4,60552052	33	$86833176 \cdot 10^{29}$	36,93868569
9	362880	5,55976303	34	$29523280 \cdot 10^{31}$	38,47016460
10	3628800	6,55976303	35	$10333148 \cdot 10^{33}$	40,01423265
11	39916800	7,60115572	36	$37199333 \cdot 10^{34}$	41,57053515
12	$47900160 \cdot 10$	8,68033696	37	$13763753 \cdot 10^{36}$	43,13873687
13	$62270208 \cdot 10^{2}$	9,79428032	38	$52302262 \cdot 10^{37}$	44,71852047
14	$87178291 \cdot 10^{3}$	10,94040835	39	$20397882 \cdot 10^{39}$	46,30958508
15	$13076744 \cdot 10^{5}$	12,11649961	40	$81591528 \cdot 10^{40}$	47,91164507
16	$20922790 \cdot 10^{6}$	13,32061959	41	$33452527 \cdot 10^{42}$	49,52442892
17	$35568743 \cdot 10^{7}$	14,55106852	42	$14050061 \cdot 10^{44}$	51,14767822
18	$64023737 \cdot 10^{8}$	15,80634102	43	$60415263 \cdot 10^{45}$	52,78114667
19	$12164510 \cdot 10^{10}$	17,08509462	44	$26582716 \cdot 10^{47}$	54,42459935
20	$24329020 \cdot 10^{11}$	18,38612462	45	$11962222 \cdot 10^{49}$	56,07781186
21	$51090942 \cdot 10^{12}$	19,70834391	46	$55026222 \cdot 10^{50}$	57,74056969
22	$11240007 \cdot 10^{14}$	21,05076659	47	$25862324 \cdot 10^{52}$	59,41266755
23	$25852017 \cdot 10^{15}$	22,41249443	48	$12413916 \cdot 10^{54}$	61,09390879
24	$62044840 \cdot 10^{16}$	23,79270567	49	$60828186 \cdot 10^{55}$	62.78410487
25	$15511210 \cdot 10^{18}$	25,19064568	50	$30414093 \cdot 10^{57}$	64,48307487

T a b e l 2.

Binomiaalkordajad C_n^k.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970
21	1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490
22	1	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770
23	1	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314
24	1	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471
25	1	25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575
26	1	26	325	2600	14950	65780	230230	657800	1562275
27	1	27	351	2925	17550	80730	296010	888030	2220075
28	1	28	378	3276	20475	98280	376740	1184040	3108105
29	1	29	406	3654	23751	118755	475020	1560780	4292145
30	1	30	435	4060	27405	142506	593775	2035800	5852925

[1] Tabelisse on n suuremate väärtuste korral (n = 15, ..., 30) paigutatud ainult binomiaalkordajad C_n^k kuni k väärtuseni $\frac{n}{2}$; ülejäänute väärtused saab tabelist leida seose

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad (k=0,1,\ldots,n)$$

abil.

T a b e l 2 (järg).

9	10	11	12	13	14	15	$n \backslash k$
							2
							3
							4
							5
							6
							7
							8
1							9
10	1						10
55	11	1					11
220	66	12	1				12
715	286	78	13	1			13
2002	1001	364	91	14	1		14
5005	3003	1365	455	105	15	1	15
11440	8008	4368	1820	560	120	16	16
24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17
48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	18
92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	19
167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504	20
293930	352716	352716	293930	203490	116280	54264	21
497420	646646	705432	646646	497420	319770	170544	22
817190	1144066	1352078	1352078	1144066	817190	490314	23
1307504	1961256	2496144	2704156	2496144	1961256	1307504	24
2042975	3268760	4457400	5200300	5200300	4457400	3268760	25
3124550	5311735	7726160	9657700	10400600	9657700	7726160	26
4686825	8436285	13037895	17383860	20058300	20058300	17383860	27
6906900	13123110	21474180	30421755	37442160	40116600	37442160	28
10015005	20030010	34597290	51895935	67863915	77558760	77558760	29
14307150	30045015	54627300	86493225	119759850	145422675	155117520	30

Tabel 3.

Poissoni jaotus $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05362	0,07581
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01263
4		0,00005	0,00025	0,00071	0,00158
5			0,00001	0,00005	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9	
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	
2	0,09878	0,12166	0,14379	0,16466	
3	0,01976	0,02838	0,03834	0,04939	
4	0,00296	0,00496	0,00766	0,01111	
5	0,00035	0,00069	0,00123	0,00200	
6	0,00003	0,00008	0,00016	0,00030	
7			0,00001	0,00003	

k \ λ	1	2	3	4	5
0	0,36788	0,13534	0,04978	0,01831	0,00673
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01532	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00306	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05040	0,10420	0,14622
7	0,00007	0,00343	0,02160	0,05954	0,10444
8		0,00085	0,00810	0,02977	0,06527
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03626
10		0,00003	0,00081	0,00529	0,01813
11			0,00022	0,00192	0,00824
12			0,00005	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00019	0,00132
14				0,00005	0,00047
15				0,00001	0,00015
16					0,00004
17					0,00001

Tabel 3 (järg).

k \ λ	6	7	8	9	10
0	0,00247	0,00091	0,00033	0,00012	0,00004
1	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045
2	0,04461	0,02234	0,01073	0,00499	0,00227
3	0,08923	0,05212	0,02862	0,01499	0,00756
4	0,13385	0,09122	0,05725	0,03373	0,01891
5	0,16062	0,12772	0,09160	0,06072	0,03783
6	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06305
7	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09007
8	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260
9	0,06883	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511
10	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511
11	0,02252	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374
12	0,01126	0,02635	0,04812	0,07276	0,09478
13	0,00519	0,01418	0,02961	0,05037	0,07290
14	0,00222	0,00709	0,01692	0,03238	0,05207
15	0,00089	0,00331	0,00902	0,01943	0,03471
16	0,00033	0,00144	0,00451	0,01093	0,02169
17	0,00011	0,00059	0,00212	0,00578	0,01276
18	0,00003	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709
19	0,00001	0,00008	0,00039	0,00137	0,00373
20		0,00003	0,00015	0,00061	0,00186
21			0,00006	0,00026	0,00088
22			0,00002	0,00010	0,00040
23				0,00004	0,00017
24				0,00001	0,00007
25					0,00002
26					0,00001

k \ λ	11	12	13	14	15
0	0,00001				
1	0,00018	0,00007	0,00002	0,00001	
2	0,00101	0,00044	0,00019	0,00008	0,00003
3	0,00370	0,00177	0,00082	0,00038	0,00017
4	0,01018	0,00530	0,00269	0,00133	0,00064
5	0,02241	0,01274	0,00699	0,00373	0,00193
6	0,04109	0,02548	0,01515	0,00869	0,00483
7	0,06457	0,04368	0,02814	0,01739	0,01037
8	0,08879	0,06552	0,04573	0,03043	0,01944
9	0,10853	0,08736	0,06605	0,04734	0,03240
10	0,11938	0,10484	0,08587	0,06628	0,04861
11	0,11939	0,11437	0,10148	0,08435	0,06628
12	0,10943	0,11437	0,10994	0,09841	0,08285
13	0,09259	0,10557	0,10994	0,10599	0,09560
14	0,07275	0,09048	0,10209	0,10599	0,10244
15	0,05335	0,07239	0,08847	0,09892	0,10244
16	0,03668	0,05429	0,07188	0,08655	0,09603
17	0,02373	0,03832	0,05497	0,07128	0,08473
18	0,01450	0,02555	0,03970	0,05544	0,07061
19	0,00839	0,01613	0,02716	0,04085	0,05574
20	0,00461	0,00968	0,01765	0,02859	0,04181
21	0,00241	0,00553	0,01093	0,01906	0,02986
22	0,00121	0,00301	0,00645	0,01213	0,02036
23	0,00057	0,00157	0,00365	0,00738	0,01328
24	0,00026	0,00078	0,00197	0,00430	0,00830
25	0,00011	0,00037	0,00102	0,00241	0,00498
26	0,00004	0,00017	0,00051	0,00129	0,00287
27	0,00002	0,00007	0,00024	0,00067	0,00159
28		0,00003	0,00011	0,00033	0,00085
29		0,00001	0,00005	0,00016	0,00044
30			0,00002	0,00007	0,00022
31				0,00003	0,00010
32				0,00001	0,00005
33					0,00002
34					0,00001

Tabel 3 (järg).

λ / k	16	17	18	19	20
0					
1					
2	0,00001				
3	0,00007	0,00003			
4	0,00030	0,00014	0,00006	0,00003	0,00001
5	0,00098	0,00049	0,00024	0,00011	0,00005
6	0,00262	0,00138	0,00071	0,00036	0,00018
7	0,00599	0,00337	0,00185	0,00099	0,00052
8	0,01198	0,00716	0,00416	0,00236	0,00130
9	0,02131	0,01352	0,00832	0,00498	0,00290
10	0,03409	0,02300	0,01498	0,00946	0,00581
11	0,04959	0,03554	0,02452	0,01635	0,01057
12	0,06612	0,05035	0,03678	0,02588	0,01762
13	0,08138	0,06584	0,05092	0,03783	0,02711
14	0,09301	0,07996	0,06548	0,05135	0,03874
15	0,09921	0,09062	0,07857	0,06504	0,05165
16	0,09921	0,09628	0,08839	0,07724	0,06456
17	0,09338	0,09628	0,09359	0,08632	0,07595
18	0,08300	0,09093	0,09359	0,09112	0,08439
19	0,06989	0,08136	0,08867	0,09112	0,08883
20	0,05592	0,06915	0,07980	0,08656	0,08883
21	0,04260	0,05598	0,06840	0,07832	0,08460
22	0,03098	0,04326	0,05596	0,06764	0,07691
23	0,02155	0,03197	0,04380	0,05587	0,06688
24	0,01437	0,02265	0,03285	0,04423	0,05573
25	0,00919	0,01540	0,02365	0,03362	0,04458
26	0,00566	0,01007	0,01637	0,02456	0,03429
27	0,00335	0,00634	0,01091	0,01728	0,02540
28	0,00191	0,00385	0,00701	0,01173	0,01814
29	0,00105	0,00225	0,00435	0,00768	0,01251
30	0,00056	0,00127	0,00261	0,00486	0,00834
31	0,00029	0,00070	0,00151	0,00298	0,00538
32	0,00014	0,00037	0,00085	0,00177	0,00336
33	0,00007	0,00019	0,00046	0,00102	0,00203
34	0,00003	0,00009	0,00024	0,00057	0,00119
35	0,00001	0,00004	0,00012	0,00030	0,00068
36		0,00002	0,00006	0,00016	0,00038
37		0,00001	0,00003	0,00008	0,00020
38			0,00001	0,00004	0,00010
39				0,00002	0,00005
40					0,00002
41					0,00001

Tabel 4.

Normaaljaotuse N(0,1) jaotusfunktsioon

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000						
0,01	0,5040	0,41	0,6591	0,81	0,7910	1,21	0,8869
0,02	0,5080	0,42	0,6628	0,82	0,7939	1,22	0,8888
0,03	0,5120	0,43	0,6664	0,83	0,7967	1,23	0,8907
0,04	0,5160	0,44	0,6700	0,84	0,7995	1,24	0,8925
0,05	0,5199	0,45	0,6736	0,85	0,8023	1,25	0,8944
0,06	0,5239	0,46	0,6772	0,86	0,8051	1,26	0,8962
0,07	0,5279	0,47	0,6808	0,87	0,8078	1,27	0,8980
0,08	0,5319	0,48	0,6844	0,88	0,8106	1,28	0,8997
0,09	0,5359	0,49	0,6879	0,89	0,8133	1,29	0,9015
0,10	0,5398	0,50	0,6915	0,90	0,8159	1,30	0,9032
0,11	0,5438	0,51	0,6950	0,91	0,8186	1,31	0,9049
0,12	0,5478	0,52	0,6985	0,92	0,8212	1,32	0,9066
0,13	0,5517	0,53	0,7019	0,93	0,8238	1,33	0,9082
0,14	0,5557	0,54	0,7054	0,94	0,8264	1,34	0,9099
0,15	0,5596	0,55	0,7088	0,95	0,8289	1,35	0,9115
0,16	0,5636	0,56	0,7123	0,96	0,8315	1,36	0,9131
0,17	0,5675	0,57	0,7157	0,97	0,8340	1,37	0,9147
0,18	0,5714	0,58	0,7190	0,98	0,8365	1,38	0,9162
0,19	0,5753	0,59	0,7224	0,99	0,8389	1,39	0,9177
0,20	0,5793	0,60	0,7257	1,00	0,8413	1,40	0,9192
0,21	0,5832	0,61	0,7291	1,01	0,8438	1,41	0,9207
0,22	0,5871	0,62	0,7324	1,02	0,8461	1,42	0,9222
0,23	0,5910	0,63	0,7357	1,03	0,8485	1,43	0,9236
0,24	0,5948	0,64	0,7389	1,04	0,8508	1,44	0,9251
0,25	0,5987	0,65	0,7422	1,05	0,8531	1,45	0,9265
0,26	0,6026	0,66	0,7454	1,06	0,8554	1,46	0,9279
0,27	0,6064	0,67	0,7486	1,07	0,8577	1,47	0,9292
0,28	0,6103	0,68	0,7517	1,08	0,8599	1,48	0,9306
0,29	0,6141	0,69	0,7549	1,09	0,8621	1,49	0,9319
0,30	0,6179	0,70	0,7580	1,10	0,8643	1,50	0,9332
0,31	0,6217	0,71	0,7611	1,11	0,8665	1,51	0,9345
0,32	0,6255	0,72	0,7642	1,12	0,8686	1,52	0,9357
0,33	0,6293	0,73	0,7673	1,13	0,8708	1,53	0,9370
0,34	0,6331	0,74	0,7703	1,14	0,8729	1,54	0,9382
0,35	0,6368	0,75	0,7734	1,15	0,8749	1,55	0,9394
0,36	0,6406	0,76	0,7764	1,16	0,8770	1,56	0,9406
0,37	0,6443	0,77	0,7794	1,17	0,8790	1,57	0,9418
0,38	0,6480	0,78	0,7823	1,18	0,8810	1,58	0,9429
0,39	0,6517	0,79	0,7853	1,19	0,8830	1,59	0,9441
0,40	0,6554	0,80	0,7881	1,20	0,8849	1,60	0,9452

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,61	0,9463	1,86	0,9686	2,22	0,9868	2,72	0,9967
1,62	0,9474	1,87	0,9693	2,24	0,9875	2,74	0,9969
1,63	0,9484	1,88	0,9699	2,26	0,9881	2,76	0,9971
1,64	0,9495	1,89	0,9706	2,28	0,9887	2,78	0,9973
1,65	0,9505	1,90	0,9713	2,30	0,9893	2,80	0,9974
1,66	0,9515	1,91	0,9719	2,32	0,9898	2,82	0,9976
1,67	0,9525	1,92	0,9726	2,34	0,9904	2,84	0,9977
1,68	0,9535	1,93	0,9732	2,36	0,9909	2,86	0,9979
1,69	0,9545	1,94	0,9738	2,38	0,9913	2,88	0,9880
1,70	0,9554	1,95	0,9744	2,40	0,9918	2,90	0,9981
1,71	0,9564	1,96	0,9750	2,42	0,9922	2,92	0,9982
1,72	0,9572	1,97	0,9756	2,44	0,9927	2,94	0,9984
1,73	0,9582	1,98	0,9761	2,46	0,9931	2,96	0,9985
1,74	0,9591	1,99	0,9767	2,48	0,9934	2,98	0,9986
1,75	0,9599	2,00	0,9772	2,50	0,9938	3,00	0,9986
1,76	0,9608	2,02	0,9783	2,52	0,9941	3,20	0,9993
1,77	0,9616	2,04	0,9793	2,54	9,9945	3,40	0,9996
1,78	0,9625	2,06	0,9803	2,56	0,9948	3,60	0,9998
1,79	0,9633	2,08	0,9812	2,58	0,9951	3,80	0,9999
1,80	0,9641	2,10	0,9821	2,60	0,9953		
1,81	0,9649	2,12	0,9830	2,62	0,9956		
1,82	0,9656	2,14	0,9838	2,64	0,9959		
1,83	0,9664	2,16	0,9846	2,66	0,9961		
1,84	0,9671	2,18	0,9854	2,68	0,9963		
1,85	0,9678	2,20	0,9861	2,70	0,9965		

T a b e l 5.

Studenti t-jaotus; f on vabadus-
astmete arv.

Olulisuse nivoo α (protsentides) kahepoolse hüpoteesi korral.

f \ α	50	25	10	5	2	1	0,2	0,1
1	1,00	2,41	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	.816	1,60	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	.765	1,42	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	.741	1,34	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	.727	1,30	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	.718	1,27	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	.711	1,25	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	.706	1,24	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	.703	1,23	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	.700	1,22	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	.697	1,21	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	.695	1,21	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	.694	1,20	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	.692	1,20	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	.691	1,20	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	.690	1,19	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	.689	1,19	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	.688	1,19	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	.688	1,19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	.687	1,18	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	.686	1,18	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	.686	1,18	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	685	1,18	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	.685	1,18	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	.684	1,18	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	.684	1,18	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	.684	1,18	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	.683	1,17	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	.683	1,17	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	.683	1,17	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	.681	1,17	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	.679	1,16	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	.677	1,16	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	.674	1,15	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
f / α	25	12,5	5	2,5	1	0,5	0,1	0,05

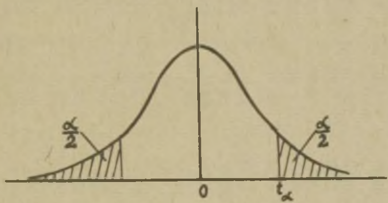
Olulisuse nivoo α' (protsentides) ühepoolse hüpoteesi korral.

Studenti t-jaotuse tabeli kasutamine.

Kahepoolse hüpoteesi kontrollimiseks võime tabelist leida sellised t_α väärtused (vastavalt antud vabadusastmete arvule), et kehtiks võrdus

$$P(|X| > t_\alpha) = \alpha$$

(vt. joonis 69).

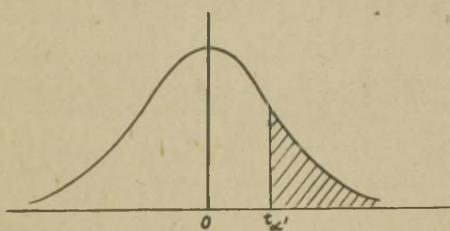


Joon. 69.

Ühepoolse hüpoteesi kontrollimiseks saame tabelist leida $t_{\alpha'}$, väärtused nii, et kehtib võrdus

$$P(X > t_{\alpha'}) = \alpha'$$

(vt. joonis 70).



Joon. 70.

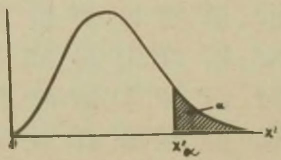
T a b e l 6 .

χ^2-jaotus; f on vabadusastmete arv; α on olulisuse nivoo (protsentides).

f \ α	99,0	97,5	95	90	70	50	30	10	5	2,5	1	0,1
1	,0^{3}157	,0^{3}982	,0^{2}393	,0158	,148	,455	1,07	2,71	3,84	5,02	6,62	10,8
2	,0201	,0506	,103	,211	,713	1,39	2,41	4,61	5,99	7,38	9,21	13,8
3	,115	,216	,352	,584	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	9,35	11,3	16,3
4	,297	,484	,711	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	11,1	13,3	18,5
5	,554	,831	1,15	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	12,8	15,1	20,5
6	,872	1,24	1,64	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	14,4	16,8	22,5
7	1,24	1,69	2,17	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	16,0	18,5	24,3
8	1,65	2,18	2,73	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	17,5	20,1	26,1
9	2,09	2,70	3,33	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	19,0	21,7	27,9
10	2,56	3,25	3,94	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	20,5	23,2	29,6
11	3,05	3,82	4,57	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	21,9	24,7	31,3
12	3,57	4,40	5,23	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	23,3	26,2	32,9
13	4,11	5,01	5,89	7,04	9,93	12,3	15,1	19,8	22,4	24,7	27,7	34,5
14	4,66	5,63	6,57	7,79	10,8	13,3	16,2	21,1	23,7	26,1	29,1	36,1
15	5,23	6,26	7,26	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	27,5	30,6	37,7
16	5,81	6,91	7,96	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	28,8	32,0	39,3
17	6,41	7,56	8,67	10,1	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	30,2	33,4	40,8
18	7,01	8,23	9,39	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	31,5	34,8	42,3
19	7,63	8,91	10,1	11,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	32,9	36,2	43,8
20	8,26	9,59	10,9	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	34,2	37,6	45,3
21	8,90	10,3	11,6	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	35,5	38,9	46,8
22	9,54	11,0	12,3	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	36,8	40,3	48,3
23	10,2	11,7	13,1	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	38,1	41,6	49,7
24	10,9	12,4	13,8	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	39,4	43,0	51,2
25	11,5	13,1	14,6	16,5	20,9	24,3	28,2	34,4	37,7	40,6	44,3	52,6
26	12,2	13,8	15,4	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	41,9	45,6	54,1
27	12,9	14,6	16,2	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	43,2	47,0	55,5
28	13,6	15,3	16,9	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	44,5	48,3	56,9
29	14,3	16,0	17,7	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	45,7	49,6	58,3

Tabel 6 (järg).

f \ a	99,0	97,5	95	90	70	50	30	10	5	2,5	1	0,1
30	15,0	16,8	18,5	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	47,0	50,9	59,7
40	22,2	24,4	26,5	29,1	34,9	39,3	44,2	51,8	55,8	59,3	63,7	73,4
50	29,7	32,4	34,8	37,7	44,3	49,3	54,7	63,2	67,5	71,4	76,2	86,7
60	37,5	40,5	43,2	46,5	53,8	59,3	65,2	74,4	79,1	83,3	88,4	99,6
70	45,4	48,8	51,7	55,3	63,3	69,3	75,1	85,5	90,5	95,0	100,4	112,3
80	53,5	57,2	60,4	64,3	72,9	79,3	86,1	96,6	101,9	106,6	112,3	124,8
90	61,8	65,6	69,1	73,3	82,5	89,3	96,5	107,6	113,1	118,1	124,1	137,2
100	70,1	74,2	77,9	82,4	92,1	99,3	106,9	118,5	124,3	129,6	135,8	149,4



Joon. 71.

Tabelist leiame sellised χ^2_α väärtused, et kehtib võrdus

$$P(\chi > \chi^2_\alpha) = \alpha .$$

F-jaotus. Olulisuse nivoole α = 5 % vastavad tavaliselt, olulisuse nivoole α = 1 % - poolpaksult trükitud arvud tabelis.

	f_1 — Freiheitsgrade für die größere Varianz																								
f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_2
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254	1
	4052	**4999**	**5403**	**5625**	**5764**	**5859**	**5928**	**5981**	**6022**	**6056**	**6082**	**6106**	**6142**	**6169**	**6208**	**6234**	**6258**	**6286**	**6302**	**6323**	**6334**	**6352**	**6361**	**6366**	
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41	19,42	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,47	19,48	19,49	19,49	19,50	19,50	2
	98,49	**99,00**	**99,17**	**99,25**	**99,30**	**99,33**	**99,34**	**99,36**	**99,38**	**99,40**	**99,41**	**99,42**	**99,43**	**99,44**	**99,45**	**99,46**	**99,47**	**99,48**	**99,48**	**99,49**	**99,49**	**99,49**	**99,50**	**99,50**	
3	10,13	9,55	9,28	9,12	0,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8.74	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8.60	8,58	8,57	8,56	8,54	8,54	8,53	3
	34,12	**30,82**	**29,46**	**28,71**	**28,24**	**27,91**	**27,67**	**27,49**	**27,34**	**27,23**	**27,13**	**27,05**	**26,92**	**26,83**	**26,69**	**26,60**	**26,50**	**26,41**	**26,35**	**26,27**	**26,23**	**26,18**	**26,14**	**26,12**	
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91	5,87	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,70	5,68	5,66	5,65	5,64	5,63	4
	21,20	**18,00**	**16,69**	**15,98**	**15,52**	**15,21**	**14,98**	**14,80**	**14,66**	**14,54**	**14,45**	**14,37**	**14,24**	**14,15**	**14,02**	**13,93**	**13,83**	**13,74**	**13,69**	**13,61**	**13,57**	**13,52**	**13,48**	**13,46**	
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68	4,64	4,00	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,42	4,40	4,38	4,37	4,36	5
	16,26	**13,27**	**12,06**	**11,39**	**10,97**	**10,67**	**10,45**	**10,27**	**10,15**	**10,05**	**9,96**	**9,89**	**9,77**	**9,68**	**9,55**	**9,47**	**9,38**	**9,29**	**9,24**	**9,17**	**9,13**	**9,07**	**9,04**	**9,02**	
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,96	3,02	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,72	3,71	3,69	3,68	3,67	6
	13,74	**10,92**	**9,78**	**9,15**	**8,75**	**8,47**	**8,26**	**8,10**	**7,98**	**7,87**	**7,79**	**7,72**	**7,60**	**7,52**	**7,39**	**7,31**	**7,23**	**7,14**	**7,09**	**7,02**	**6,99**	**6,94**	**6,90**	**6,88**	
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57	3,52	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,29	3,28	3,25	3,24	3,23	7
	12,25	**9,55**	**8,45**	**7,85**	**7,46**	**7,19**	**7,00**	**6,84**	**6,71**	**6,62**	**6,54**	**6,47**	**6,35**	**6,27**	**6,15**	**6,07**	**5,98**	**5,90**	**5,85**	**5,78**	**5,75**	**5,70**	**5,67**	**5,65**	
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28	3,23	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,03	3,00	2,98	2,96	2,94	2,93	8
	11,26	**8,65**	**7,59**	**7,01**	**6,63**	**6,37**	**6,19**	**6,03**	**5,91**	**5,82**	**5,74**	**5,67**	**5,56**	**5,48**	**5,36**	**5,28**	**5,20**	**5,11**	**5,06**	**5,00**	**4,96**	**4,91**	**4,88**	**4,86**	
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07	3,02	2,08	2,93	2,90	2,86	2,82	2,80	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71	9
	10,56	**8,02**	**6,99**	**6,42**	**6,06**	**5,80**	**5,62**	**5,47**	**5,35**	**5,26**	**5,18**	**5,11**	**5,00**	**4,92**	**4,80**	**4,73**	**4,64**	**4,56**	**4,51**	**4,45**	**4,41**	**4,36**	**4,33**	**4,31**	
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91	2,86	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,64	2,61	2,59	2,56	2,55	2,54	10
	10,04	**7,56**	**6,55**	**5,99**	**5,64**	**5,39**	**5,21**	**5,06**	**4,95**	**4,85**	**4,78**	**4,71**	**4,60**	**4,52**	**4,41**	**4,33**	**4,25**	**4,17**	**4,12**	**4,05**	**4,01**	**3,96**	**3,93**	**3,91**	
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2.79	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,50	2,47	2,45	2,42	2,41	2,40	11
	9,65	**7,20**	**6,22**	**5,67**	**5,32**	**5,07**	**4,88**	**4,74**	**4,63**	**4,54**	**4,46**	**4,40**	**4,29**	**4,21**	**4,10**	**4,02**	**3,94**	**3,86**	**3,80**	**3,74**	**3,70**	**3,66**	**3,62**	**3,60**	
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69	2,64	2,60	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,36	2,35	2,32	2,31	2,30	12
	9,33	**6,93**	**5,95**	**5,41**	**5,06**	**4,82**	**4,65**	**4,50**	**4,39**	**4,30**	**4,22**	**4,16**	**4,05**	**3,98**	**3,86**	**3,78**	**3,70**	**3,61**	**3,56**	**3,49**	**3,46**	**3,41**	**3,38**	**3,36**	
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60	2,55	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,28	2,26	2,24	2,22	2,21	13
	9,07	**6,70**	**5,74**	**5,20**	**4,86**	**4,62**	**4,44**	**4,30**	**4,19**	**4,10**	**4,02**	**3,96**	**3,85**	**3,78**	**3,67**	**3,59**	**3,51**	**3,42**	**3,37**	**3,30**	**3,27**	**3,21**	**3,18**	**3,16**	
14	4,60	3.74	3,34	3.11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19	2,16	2,14	2,13	14
	8,86	**6,51**	**5,56**	**5,03**	**4,69**	**4,46**	**4,28**	**4,14**	**4,03**	**3,94**	**3,86**	**3,80**	**3,70**	**3,62**	**3,51**	**3,43**	**3,34**	**3,26**	**3,21**	**3,14**	**3,11**	**3,06**	**3,02**	**3,00**	
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,04	2,59	2,55	2,51	2,48	2,43	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,18	2,15	2,12	2,10	2,08	2,07	15
	8,68	**6,36**	**5,42**	**4,89**	**4,56**	**4,32**	**4,14**	**4,00**	**3,89**	**3,80**	**3,73**	**3,67**	**3,56**	**3,48**	**3,36**	**3,29**	**3,20**	**3,12**	**3,07**	**3,00**	**2,97**	**2,92**	**2,89**	**2,87**	

Tabel 7 (järg).

f_2	f_1 = Freiheitsgrade für die größere Varianz																								f_2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
16	4,49 **8,53**	3,63 **6,23**	3,24 **5,29**	3,01 **4,77**	2,85 **4,44**	2,74 **4,20**	2,66 **4,03**	2,59 **3,89**	2,54 **3,78**	2,49 **3,69**	2,45 **3,61**	2,42 **3,55**	2,37 **3,45**	2,33 **3,37**	2,28 **3,25**	2,24 **3,18**	2,20 **3,10**	2,16 **3,01**	2,13 **2,96**	2,09 **2,89**	2,07 **2,86**	2,04 **2,80**	2,02 **2,77**	2,01 **2,75**	16
17	4,45 **8,40**	3,59 **6,11**	3,20 **5,18**	2,96 **4,67**	2,81 **4,34**	2,70 **4,10**	2,62 **3,93**	2,55 **3,79**	2,50 **3,68**	2,45 **3,59**	2,41 **3,52**	2,38 **3,45**	2,33 **3,35**	2,29 **3,27**	2,23 **3,16**	2,19 **3,08**	2,15 **3,00**	2,11 **2,92**	2,08 **2,86**	2,04 **2,79**	2,02 **2,76**	1,99 **2,70**	1,97 **2,67**	1,96 **2,65**	17
18	4,41 **8,28**	3,55 **6,01**	3,16 **5,09**	2,93 **4,58**	2,77 **4,25**	2,66 **4,01**	2,58 **3,85**	2,51 **3,71**	2,46 **3,60**	2,41 **3,51**	2,37 **3,44**	2,34 **3,37**	2,29 **3,27**	2,25 **3,19**	2,19 **3,07**	2,15 **3,00**	2,11 **2,91**	2,07 **2.83**	2,04 **2,78**	2,00 **2,71**	1,98 **2,68**	1,95 **2,62**	1,93 **2,59**	1,92 **2,57**	18
19	4,38 **8,18**	3,52 **5,93**	3,13 **5,01**	2,90 **4,50**	2,74 **4,17**	2,63 **3,94**	2,55 **3,77**	2,48 **3,63**	2,43 **3,52**	2,38 **3,43**	2,34 **3,36**	2,31 **3,30**	2,26 **3,19**	2,21 **3,12**	2,15 **3,00**	2,11 **2,92**	2,07 **2,84**	2,02 **2,76**	2,00 **2,70**	1,96 **2,63**	1,94 **2,60**	1,91 **2,54**	1,90 **2,51**	1,88 **2,49**	19
20	4,35 **8,10**	3,49 **5,85**	3,10 **4,94**	2,87 **4,43**	2,71 **4,10**	2,60 **3,87**	2,52 **3,71**	2,45 **3,56**	2,40 **3,45**	2,35 **3,37**	2,31 **3,30**	2,28 **3,23**	2,23 **3,13**	2,18 **3,05**	2,12 **2,94**	2,08 **2,86**	2,04 **2,77**	1,99 **2,69**	1,96 **2,63**	1,92 **2,56**	1,90 **2,53**	1,87 **2,47**	1,85 **2,44**	1,84 **2,42**	20
21	4,32 **8,02**	3,47 **5,78**	3,07 **4,87**	2,84 **4,37**	2,68 **4,04**	2,57 **3,81**	2,49 **3,65**	2,42 **3,51**	2,37 **3,40**	2,32 **3,31**	2,28 **3,24**	2,25 **3,17**	2,20 **3,07**	2,15 **2,99**	2,09 **2,88**	2,05 **2,80**	2,00 **2,72**	1,96 **2,63**	1,93 **2,58**	1,89 **2,51**	1,87 **2,47**	1,84 **2,42**	1,82 **2,38**	1,81 **2,36**	21
22	4,30 **7,94**	3,44 **5,72**	3,05 **4,82**	2,82 **4,31**	2,66 **3,99**	2,55 **3,76**	2,47 **3,59**	2,40 **3,45**	2,35 **3,35**	2,30 **3,26**	2,26 **3,18**	2,23 **3,12**	2,18 **3,02**	2,13 **2,94**	2,07 **2,83**	2,03 **2,75**	1,98 **2,67**	1,93 **2,58**	1,91 **2,53**	1,87 **2,46**	1,84 **2,42**	1,81 **2,37**	1,80 **2,33**	1,78 **2,31**	22
23	4,28 **7,88**	3,42 **5,66**	3,03 **4,76**	2,80 **4,26**	2,64 **3,94**	2,53 **3,71**	2,45 **3,54**	2,38 **3,41**	2,32 **3,30**	2,28 **3,21**	2,24 **3,14**	2,20 **3,07**	2,14 **2,97**	2,10 **2,89**	2,05 **2,78**	2,00 **2,70**	1,96 **2,62**	1,91 **2,53**	1,88 **2,48**	1,84 **2,41**	1,82 **2,37**	1,79 **2,32**	1,77 **2,28**	1,76 **2,26**	23
24	4,26 **7,82**	3,40 **5,61**	3,01 **4,72**	2,78 **4,22**	2,62 **3,90**	2,51 **3,67**	2,43 **3,50**	2,36 **3,36**	2,30 **3,25**	2,26 **3,17**	2,22 **3,09**	2,18 **3,03**	2,13 **2,93**	2,09 **2,85**	2,02 **2,74**	1,98 **2,66**	1,94 **2,58**	1,89 **2,49**	1,86 **2,44**	1,82 **2,36**	1,80 **2,33**	1,76 **2,27**	1,74 **2,23**	1,73 **2,21**	24
25	4,24 **7,77**	3,38 **5,57**	2,99 **4,68**	2,76 **4,18**	2,60 **3,86**	2,49 **3,63**	2,41 **3,46**	2,34 **3,32**	2,28 **3,21**	2,24 **3,13**	2,20 **3,05**	2,16 **2,99**	2,11 **2,89**	2,06 **2,81**	2,00 **2,70**	1,96 **2,62**	1,92 **2,54**	1,87 **2,45**	1,84 **2,40**	1,80 **2,32**	1,77 **2,29**	1,74 **2,23**	1,72 **2,19**	1,71 **2,17**	25
26	4,22 **7,72**	3,37 **5,53**	2,98 **4,64**	2,74 **4,14**	2,59 **3,82**	2,47 **3,59**	2,39 **3,42**	2,32 **3,29**	2,27 **3,17**	2,22 **3,09**	2,18 **3,02**	2,15 **2,96**	2,10 **2,86**	2,05 **2,77**	1,99 **2,66**	1,95 **2,58**	1,90 **2,50**	1,85 **2,41**	1,82 **2,36**	1,78 **2,28**	1,76 **2,25**	1,72 **2,19**	1,70 **2,15**	1,69 **2,13**	26
27	4,21 **7,68**	3,35 **5,49**	2,96 **4,60**	2,73 **4,11**	2,57 **3,79**	2,46 **3.56**	2,37 **3,39**	2,30 **3,26**	2,25 **3,14**	2,20 **3,06**	2,16 **2,98**	2,13 **2,93**	2,08 **2,83**	2,03 **2,74**	1,97 **2,63**	1,93 **2.55**	1,88 **2,47**	1,84 **2,38**	1,80 **2,33**	1,76 **2,25**	1,74 **2,21**	1,71 **2,16**	1,68 **2,12**	1,67 **2,10**	27
28	4,20 **7,64**	3,34 **5,45**	2,95 **4,57**	2,71 **4,07**	2,56 **3,76**	2,44 **3,53**	2,36 **3,36**	2,29 **3,23**	2,24 **3,11**	2,19 **3,03**	2,15 **2,95**	2,12 **2,90**	2,06 **2,80**	2,02 **2,71**	1,96 **2,60**	1,91 **2,52**	1,87 **2,44**	1,81 **2,35**	1,78 **2,30**	1,75 **2,22**	1,72 **2,18**	1,69 **2,13**	1,67 **2,09**	1,65 **2,06**	28
29	4,18 **7,60**	3,33 **5,42**	2,93 **4,54**	2,70 **4,04**	2,54 **3,73**	2,43 **3,50**	2,35 **3,33**	2,28 **3.20**	2,22 **3,08**	2,18 **3,00**	2,14 **2,92**	2,10 **2,87**	2,05 **2,77**	2,00 **2,68**	1,94 **2,57**	1,90 **2,49**	1,85 **2,41**	1,80 **2,32**	1,77 **2,27**	1,73 **2,19**	1,71 **2,15**	1,68 **2,10**	1,65 **2,06**	1,64 **2,03**	29
30	4,17 **7,56**	3,32 **5,39**	2,92 **4,51**	2,69 **4,02**	2,53 **3,70**	2,42 **3,47**	2,34 **3,30**	2,27 **3,17**	2,21 **3,06**	2,16 **2,98**	2,12 **2,90**	2,00 **2,84**	2,04 **2,74**	1,99 **2,66**	1,93 **2,55**	1,89 **2,47**	1,84 **2,38**	1,79 **2,29**	1,76 **2,24**	1,72 **2,16**	1,69 **2,13**	1,66 **2,07**	1,64 **2,03**	1,62 **2,01**	30

Tabel 7 (järg).

f_2	f_1 = Freiheitsgrade für die größere Varianz 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_2
32	4,15 **7,50**	3,30 **5,34**	2,90 **4,46**	2,67 **3,97**	2,51 **3,66**	2,40 **3,42**	2,32 **3,25**	2,25 **3,12**	2,19 **3,01**	2,14 **2,94**	2,10 **2,86**	2,07 **2,80**	2,02 **2,70**	1,97 **2,62**	1,91 **2,51**	1,86 **2,42**	1,82 **2,34**	1,76 **2,25**	1,74 **2,20**	1,69 **2,12**	1,67 **2,08**	1,64 **2,02**	1,61 **1,98**	1,59 **1,96**	32
34	4,13 **7,44**	3,28 **5,29**	2,88 **4,42**	2,65 **3,93**	2,49 **3,61**	2,38 **3,38**	2,30 **3,21**	2,23 **3,08**	2,17 **2,97**	2,12 **2,89**	2,08 **2,82**	2,05 **2,76**	2,00 **2,66**	1,95 **2,58**	1,89 **2,47**	1,84 **2,38**	1,80 **2,30**	1,74 **2,21**	1,71 **2,15**	1,67 **2,08**	1,64 **2,04**	1,61 **1,98**	1,59 **1,94**	1,57 **1,91**	34
36	4,11 **7,39**	3,26 **5,25**	2,86 **4,38**	2,63 **3,89**	2,48 **3,58**	2,36 **3,35**	2,28 **3,18**	2,21 **3,04**	2,15 **2,94**	2,10 **2,86**	2,06 **2,78**	2,03 **2,72**	1,98 **2,62**	1,93 **2,54**	1,87 **2,43**	1,82 **2,35**	1,78 **2,26**	1,72 **2,17**	1,69 **2,12**	1,65 **2,04**	1,62 **2,00**	1,59 **1,94**	1,56 **1,90**	1,55 **1,87**	36
38	4,10 **7,35**	3,25 **5,21**	2,85 **4,34**	2,62 **3,86**	2,46 **3,54**	2,35 **3,32**	2,26 **3,15**	2,19 **3,02**	2,14 **2,91**	2,09 **2,82**	2,05 **2,75**	2,02 **2,69**	1,96 **2,59**	1,92 **2,51**	1,85 **2,40**	1,80 **2,32**	1,76 **2,22**	1,71 **2,14**	1,67 **2,08**	1,63 **2,00**	1,60 **1,97**	1,57 **1,90**	1,54 **1,86**	1,53 **1,84**	38
40	4,08 **7,31**	3,23 **5,18**	2,84 **4,31**	2,61 **3,83**	2,45 **3,51**	2,34 **3,29**	2,25 **3,12**	2,18 **2,99**	2,12 **2,88**	2,07 **2,80**	2,04 **2,73**	2,00 **2,66**	1,95 **2,56**	1,90 **2,49**	1,84 **2,37**	1,79 **2,29**	1,74 **2,20**	1,69 **2,11**	1,66 **2,05**	1,61 **1,97**	1,59 **1,94**	1,55 **1,88**	1,53 **1,84**	1,51 **1,81**	40
42	4,07 **7,27**	3,22 **5,15**	2,83 **4,29**	2,50 **3,80**	2,44 **3,49**	2,32 **3,26**	2,24 **3,10**	2,17 **2,96**	2,11 **2,86**	2,06 **2,77**	2,02 **2,76**	1,99 **2,64**	1,94 **2,54**	1,89 **2,46**	1,82 **2,35**	1,78 **2,26**	1,73 **2,17**	1,68 **2,08**	1,64 **2,02**	1,60 **1,94**	1,57 **1,91**	1,54 **1,85**	1,51 **1,80**	1,49 **1,78**	42
44	4,06 **7,24**	3,21 **5,12**	2,82 **4,26**	2,58 **3,78**	2,43 **3,46**	2,31 **3,24**	2,23 **3,07**	2,10 **2,94**	2,10 **2,84**	2,05 **2,75**	2,01 **2,68**	1,98 **2,62**	1,92 **2,52**	1,88 **2,44**	1,81 **2,32**	1,76 **2,24**	1,72 **2,15**	1,66 **2,06**	1,63 **2,00**	1,58 **1,92**	1,56 **1,88**	1,52 **1,82**	1,50 **1,78**	1,48 **1,75**	44
46	4,05 **7,21**	3,20 **5,10**	2,81 **4,24**	2,57 **3,76**	2,42 **3,44**	2,30 **3,22**	2,22 **3,05**	2,14 **2,92**	2,09 **2,82**	2,04 **2,73**	2,00 **2,66**	1,97 **2,60**	1,91 **2,50**	1,87 **2,42**	1,80 **2,30**	1,75 **2,22**	1,71 **2,13**	1,65 **2,04**	1,62 **1,98**	1,57 **1,90**	1,54 **1,86**	1,51 **1,80**	1,48 **1,76**	1,46 **1,72**	46
48	4,04 **7,19**	3,19 **5,08**	2,80 **4,22**	2,56 **3,74**	2,41 **3,42**	2,30 **3,20**	2,21 **3,04**	2,14 **2,90**	2,08 **2,80**	2,03 **2,71**	1,99 **2,64**	1,96 **2,58**	1,90 **2,48**	1,86 **2,40**	1,79 **2,28**	1,74 **2,20**	1,70 **2,11**	1,64 **2,02**	1,61 **1,96**	1,56 **1,88**	1,53 **1,84**	1,50 **1,78**	1,47 **1,73**	1,45 **1,70**	48
50	4,03 **7,17**	3,18 **5,06**	2,79 **4,20**	2,56 **3,72**	2,40 **3,41**	2,29 **3,18**	2,20 **3,02**	2,13 **2,88**	2,07 **2,78**	2,02 **2,70**	1,98 **2,62**	1,95 **2,56**	1,90 **2,46**	1,85 **2,39**	1,78 **2,26**	1,74 **2,18**	1,69 **2,10**	1,63 **2,00**	1,60 **1,94**	1,55 **1,86**	1,52 **1,82**	1,48 **1,76**	1,46 **1,71**	1,44 **1,68**	50
55	4,02 **7,12**	3,17 **5,01**	2,78 **4,16**	2,54 **3,68**	2,38 **3,37**	2,27 **3,15**	2,18 **2,98**	2,11 **2,85**	2,05 **2,75**	2,00 **2,66**	1,97 **2,59**	1,93 **2,53**	1,88 **2,43**	1,83 **2,35**	1,76 **2,23**	1,72 **2,15**	1,67 **2,06**	1,61 **1,96**	1,58 **1,90**	1,52 **1,82**	1,50 **1,78**	1,46 **1,71**	1,43 **1,66**	1,41 **1,64**	55
60	4,00 **7,08**	3,15 **4,98**	2,76 **4,13**	2,52 **3,65**	2,37 **3,34**	2,25 **3,12**	2,17 **2,95**	2,10 **2,82**	2,04 **2,72**	1,99 **2,63**	1,95 **2,56**	1,92 **2,50**	1,86 **2,40**	1,81 **2,32**	1,75 **2,20**	1,70 **2,12**	1,65 **2,03**	1,59 **1,93**	1,56 **1,87**	1,50 **1,79**	1,48 **1,74**	1,44 **1,68**	1,41 **1,63**	1,39 **1,60**	60
65	3,99 **7,04**	3,14 **4,95**	2,75 **4,10**	2,51 **3,62**	2,36 **3,31**	2,24 **3,09**	2,15 **2,93**	2,08 **2,79**	2,02 **2,70**	1,98 **2,61**	1,94 **2,54**	1,90 **2,47**	1,85 **2,37**	1,80 **2,30**	1,73 **2,18**	1,68 **2,09**	1,63 **2,00**	1,57 **1,90**	1,54 **1,84**	1,49 **1,76**	1,46 **1,71**	1,42 **1,64**	1,39 **1,60**	1,37 **1,56**	65
70	3,98 **7,01**	3,13 **4,92**	2,74 **4,08**	2,50 **3,60**	2,35 **3,29**	2,23 **3,07**	2,14 **2,91**	2,07 **2,77**	2,01 **2,67**	1,97 **2,59**	1,93 **2,51**	1,89 **2,45**	1,84 **2,35**	1,79 **2,28**	1,72 **2,15**	1,67 **2,07**	1,62 **1,98**	1,56 **1,88**	1,53 **1,82**	1,47 **1,74**	1,45 **1,69**	1,40 **1,62**	1,37 **1,56**	1,35 **1,53**	70
80	3,96 **6,96**	3,11 **4,88**	2,72 **4,04**	2,48 **3,56**	2,33 **3,25**	2,21 **3,04**	2,12 **2,87**	2,05 **2,74**	1,99 **2,64**	1,95 **2,55**	1,91 **2,48**	1,88 **2,41**	1,82 **2,32**	1,77 **2,24**	1,70 **2,11**	1,65 **2,03**	1,60 **1,94**	1,54 **1,84**	1,51 **1,78**	1,45 **1,70**	1,42 **1,65**	1,38 **1,57**	1,35 **1,52**	1,32 **1,49**	80

f_2	f_1 = Freiheitsgrade für die größere Varianz																								f_2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
100	3,94 6,90	3,09 4,82	2,70 3,98	2,46 8,51	2,30 3,20	2,19 2,99	2,10 2,82	2,03 2,69	1,97 2,59	1,92 2,51	1,88 2,48	1,85 2,36	1,79 2,26	1,75 2,19	1,68 2,06	1,63 1,98	1,57 1,89	1,51 1,79	1,48 1,78	1,42 1,64	1,39 1,59	1,34 1,51	1,30 1,46	1,28 1,48	100
125	3,92 6,84	3,07 4,78	2,68 3,94	2,44 8,47	2,29 8,17	2,17 2,95	2,08 2,79	2,01 2,65	1,95 2,56	1,90 2,47	1,86 2,40	1,83 2,88	1,77 2,23	1,72 2,15	1,65 2,08	1,60 1,94	1,55 1,85	1,49 1,75	1,45 1,68	1,39 1,59	1,36 1,54	1,31 1,46	1,27 1,40	1,25 1,87	125
150	3,91 6,81	3,06 4,75	2,67 3,91	2,43 3,44	2,27 8,14	2,16 2,92	2,07 2,76	2,00 2,62	1,94 2,53	1,89 2,44	1,85 2,87	1,82 2,30	1,76 2,20	1,71 2,12	1,64 2,00	1,59 1,91	1,54 1,83	1,47 1,72	1,44 1,66	1,37 1,56	1,34 1,51	1,29 1,43	1,25 1,87	1,22 1,88	150
200	3,89 6,76	3,04 4,71	2,65 3,88	2,41 3,41	2,26 3,11	2,14 2,90	2,05 2,78	1,98 2,60	1,92 2,50	1,87 2,41	1,83 2,34	1,80 2,28	1,74 2,17	1,69 2,09	1,62 1,97	1,57 1,88	1,52 1,79	1,45 1,69	1,42 1,62	1,35 1,53	1,32 1,48	1,26 1,89	1,22 1,38	1,19 1,28	200
400	3,86 6,70	3,02 4,66	2,62 8,88	2,39 3,36	2,23 3,06	2,12 2,85	2,03 2,69	1,96 2,55	1,90 2,46	1,85 2,37	1,81 2,29	1,78 2,23	1,72 2,12	1,67 2,04	1,60 1,92	1,54 1,84	1,49 1,74	1,42 1,64	1,38 1,57	1,32 1,47	1,28 1,42	1,22 1,32	1,16 1,24	1,13 1,19	400
1000	3,85 6,66	3,00 4,62	2,61 3,80	2,38 8,34	2,22 3,04	2,10 2,82	2,02 2,66	1,95 2,58	1,89 2,43	1,84 2,34	1,80 2,26	1,76 2,20	1,70 2,09	1,65 2,01	1,58 1,89	1,53 1,81	1,47 1,71	1,41 1,61	1,36 1,54	1,30 1,44	1,26 1,38	1,19 1,28	1,13 1,19	1,08 1,11	1000
∞	3,84 6,64	2,99 4,60	2,60 8,78	2,37 8,32	2,21 3,02	2,09 2,80	2,01 2,64	1,94 2,51	1,88 2,41	1,83 2,32	1,79 2,24	1,75 2,18	1,69 2,07	1,64 1,99	1,57 1,87	1,52 1,79	1,46 1,69	1,40 1,59	1,35 1,52	1,28 1,41	1,24 1,36	1,17 1,25	1,11 1,15	1,00 1,00	∞

f_1 ja f_2 tähistavad vabadusastmete arve, kusjuures f_1 vastab suurema varieeruvusega väljavõttele (lugejale).

Tabelist leiame sellised F_α väärtused, et kehtib võrdus

$$P(X > F_\alpha) = \alpha.$$

(vt. joonis 71).

Tabel 8.

Normaaljaotuse N(0,1) tõenäosuse

tihedus $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$.

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989^{-4}	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970^{-4}	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910^{-4}	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814^{-4}	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683^{-4}	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521^{-4}	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332^{-4}	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123^{-4}	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897^{-4}	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661^{-4}	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420^{-4}	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179^{-4}	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942^{-4}	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714^{-4}	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497^{-4}	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295^{-4}	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109^{-4}	1092	1074	1057	1040	1023	1006	9893^{-5}	9728	9566
1,7	9405^{-5}	9246	9089	8933	8780	8628	8478	8329	8183	8038
1,8	7895^{-5}	7754	7614	7477	7341	7206	7074	6943	6814	6687
1,9	6562^{-5}	6438	6316	6195	6077	5959	5844	5730	5618	5508
2,0	5399^{-5}	5292	5186	5082	4980	4879	4780	4682	4586	4491
2,1	4398^{-5}	4307	4217	4128	4041	3955	3871	3788	3706	3626
2,2	3547^{-5}	3470	3394	3319	3246	3174	3103	3034	2965	2898
2,3	2883^{-5}	2768	2705	2643	2582	2522	2463	2406	2349	2294
2,4	2239^{-5}	2186	2134	2083	2033	1984	1936	1888	1842	1797
2,5	1753^{-5}	1709	1667	1625	.585	1545	1506	1468	1431	1394
2,6	1358^{-5}	1323	1289	1256	1223	1191	1160	1130	1100	1071
2,7	1042^{-5}	1014	9871^{-6}	9606	9347	9094	8846	8605	8370	8140
2,8	7915^{-6}	7697	7483	7274	7071	6873	6679	6491	6307	6127
2,9	5953^{-6}	5782	5616	5454	5296	5143	4993	4847	4705	4567
3,0	4432^{-6}	4301	4173	4049	3928	3810	3695	3584	3475	3370
3,1	3267^{-6}	3167	3070	2975	2884	2794	2707	2623	2541	2461
3,2	2384^{-6}	2309	2236	2165	2096	2029	1964	1901	1840	1780
3,3	172[illegible]	1667	1612	1560	1508	1459	1411	1364	1319	1275
3,4	1232^{-6}	1191	1151	1112	1075	1038	1003	9689^{-7}	9358	9037
3,5	8727^{-7}	8426	8135	7853	7581	7317	7061	6814	6575	6343
3,6	6119^{-7}	5902	5693	5490	5294	5105	4921	4744	4573	4408
3,7	4248^{-7}	4093	3944	3800	3661	3526	3396	3271	3149	3032
3,8	2919^{-7}	2810	2705	2604	2506	2411	2320	2232	2147	2065
3,9	1987^{-7}	1910	1837	1766	1698	1633	1569	1508	1449	1393
4,0	1338^{-7}	1286	1235	1186	1140	1094	1051	1009	9687^{-8}	9299
4,1	8926^{-8}	8567	8222	7890	7570	7263	6967	6683	6410	6147
4,2	5894^{-8}	5652	5418	5194	4979	4772	4573	4382	4199	4023
4,3	3851^{-8}	3691	3535	3386	3242	3104	2972	2845	2723	2606
4,4	2494^{-8}	2387	2284	2185	2090	1999	1912	1829	1749	1672

Tabel 9.

Väljavõtte korrelatsioonikordaja usaldusspiirid eeldusel, et üldkogumi korrelatsioonikordaja on 0; f on vabadusastmete arv.

Olulisuse nivoo α (protsentides) kahepoolse hüpoteesi korral.

f	5	1	0,1	f	5	1	0,1
1	0,997	1,000	1,000	25	0,381	0,487	0,597
2	0,950	0,990	0,999	30	0,349	0,449	0,554
3	0,878	0,959	0,991	35	0,325	0,418	0,519
4	0,811	0,917	0,974	40	0,304	0,393	0,490
5	0,754	0,875	0,951	45	0,288	0,372	0,465
6	0,707	0,834	0,925	50	0,273	0,354	0,443
7	0,666	0,798	0,898	60	0,250	0,325	0,408
8	0,632	0,765	0,872	70	0,232	0,302	0,380
9	0,602	0,735	0,847	80	0,217	0,283	0,357
10	0,576	0,708	0,823	90	0,205	0,267	0,338
11	0,553	0,684	0,801	100	0,195	0,254	0,321
12	0,532	0,661	0,780	120	0,18	0,23	0,30
13	0,514	0,641	0,760	150	0,16	0,21	0,26
14	0,497	0,623	0,742	200	0,14	0,18	0,23
15	0,482	0,606	0,725	300	0,11	0,15	0,19
16	0,468	0,590	0,708	400	0,10	0,13	0,16
17	0,456	0,575	0,693	500	0,09	0,11	0,15
18	0,444	0,561	0,679	700	0,07	0,10	0,12
19	0,433	0,549	0,665	900	0,06	0,09	0,11
20	0,423	0,537	0,652	1000	0,06	0,09	0,11
f	2,5	0,5	0,05	f	2,5	0,5	0,05

Olulisuse nivoo α protsentides ühepoolse hüpoteesi korral (vt. joonised 69 ja 70).

S i s u k o r d.

III. Tõenäosusteooria põhimõisteid.

§ 1. Sündmus ja tõenäosus.

§ 3. Jaotusfunktsioon.

§ 4. Momendid.

Э.А. ТИЙТ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Издание второе

На эстонском языке

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, I8

Vastutav toimetaja R. Tammeste
Korrektor E. Oja

TRÜ rotaprint 1970. Paljundamisele antud 2.VI 1970.
Trükipoognaid 20. Tingtrükipoognaid 18,2. Arvestus-
poognaid 14,4. Trükiarv 700. Paber 30 x 42.1/4.
MB 04165. Tell. nr. 412.

Hind 40 kop.

Hind 40 kop.